Math. F. 573 m = Tait

ANSTREICHQ.

<3663822504001O

<3663822504001O

Bayer. Staatsbibliothek

ELEMENTARES HANDBUCH

DER

QUATERNIONEN

VON

P. G. TAIT, M. A.,

PROFESSOR DER PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT IN EDINBURG.

. . . . . τετρακτύν,
παγὰν ἀενάου φύσεως ῥιζώματ' ἔχουσαν.

AUTORISIRTE UEBERSETZUNG

VON

DR. G. v. SCHERFF.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1880.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Einleitung.

Dies Werk ist ursprünglich in meinen Mussestunden geschrieben worden, zu einer Zeit, wo ich beschäftigt war mit Untersuchungen, die wenig mit diesen Fragen gemein haben. Man darf daher nicht ein wohlgeordnetes Lehrbuch erwarten. Allein die Thatsache, dass zwei Auflagen fast vollständig erschöpft sind, zeugt dafür, dass das Buch nicht ungeeignet ist, als Einleitung zu den grossartigen Werken von Sir W. Hamilton zu dienen, die wohl auf lange Zeit hinaus die Hauptquelle bleiben werden, aus der alle schöpfen müssen, die diese anziehende und mächtige mathematische Methode studiren wollen.

Indem ich stets den Hauptzweck einer jeden mathematischen Methode, die physikalischen Anwendungen, fest im Auge behielt, bemühte ich mich, so weit als möglich den Gegenstand mehr von seiner geometrischen als von seiner analytischen Seite zu betrachten.

Wir können natürlich die Eigenschaften von i, j, k als Definition geben, und dann das ganze System herleiten, wie man in der Algebra die imaginären Grössen behandelt, oder, um ein näher liegendes Beispiel zu gebrauchen, wie Hamilton mit *Couples*, *Triads* und *Sets* verfuhr. Dies mag den Mathematiker interessiren, ist aber abschreckend für den Physiker, der von Anfang an in den i, j, k geometrische Wirklichkeiten, keine algebraische Imaginäre sehen soll.

Das Inhaltsverzeichniss ist so abgefasst worden, dass es als kurzer Auszug der wichtigsten fundamentalen Formeln betrachtet werden kann; es beschränkt sich deshalb auf die fünf ersten und zwei letzten Kapitel.

Man kann von Jemand, dessen Zeit hauptsächlich von physikalischen Arbeiten in Anspruch genommen ist, nicht erwarten, dass er viel Aufmerksamkeit auf die analytischen und geometrischen Anwendungen einer derartigen Methode verwenden soll; auch bin ich mir wohl bewusst, in manchen Theilen der ersten Kapitel die Einfachheit der Quaternionen nicht vollständig klargelegt zu haben.

Ich hoffe aber, dass die Verbesserungen und Erweiterungen, die ich jetzt vorgenommen habe, und die hauptsächlich den letzten Kapiteln des Buches zu Gute gekommen sind, die Anwendung der Quaternionen auf physikalische Fragen erleichtern und dass dadurch das Werk zur Erfüllung meines Hauptzweckes brauchbarer geworden ist.

Es ist vielleicht gut zu bemerken, dass es wohl möglich ist, das Lesen eines Buches *zu leicht* zu machen, in dem Sinne, dass der Anfänger dasselbe mehrmals durchlesen kann, ohne jene Schwierigkeiten zu empfinden, ohne welche (eine besondere Begabung vielleicht ausgenommen) Niemand wahres nützliches Wissen erwerben kann.

Es ist besser, einen mühsamen Weg hinansteigen zu müssen, sollte man auch gezwungen sein, ab und zu sich selbst die Stufen auszuhauen, als in ermüdender Monotonie eine Marmortreppe oder wohlgezimmerte Leiter hinaufzusteigen. Breite Landstrassen in der Wissenschaft führen nur zu einem bestimmten Punkte, und es gibt hier keine Seitenblicke unterwegs. Auf diesem Wege werden keine Entdecker herangebildet für die Durchforschung unbekannter Gegenden.

Wo ich in wichtigen Punkten die Ergebnisse Hamilton's anführe, habe ich stets den Leser darauf aufmerksam gemacht, wem wir dieselben verdanken. Die meisten meiner eigenen Beiträge finden sich in den beiden letzten Kapiteln, die von den physikalischen Anwendungen der Methode handeln und unter andern zeigen, wie die trennbaren linearen und Vectorfunctionen und das unschätzbare ∇ zu behandeln sind.

Der physikalische Nutzen, den ich mir von diesem Operator versprach, war die erste Veranlassung, mich eingehend mit Quaternionen zu beschäftigen. Es ist mir gelungen, zur Genüge die Methoden zu entwickeln, nach welchen man mit diesem Operator zu verfahren hat, um die wichtige Anwendung auf das Potential zu machen, zu der er sich so augenscheinlich eignet. Es ist besonders zu bedauern, dass der allzufrühe Tod Hamilton's ihm nicht erlaubt hat, diesen Theil seines Planes auszuführen, denn es ist kaum daran zu zweifeln, dass er eine werthvolle *analytische* Lösung einer Aufgabe gegeben hätte, die ich nur mit Hilfe einer Art *synthetischen* Verfahrens gelöst habe, was für die Praxis allerdings genügt, aber keinen Fortschritt in der besondern analytischen Theorie des Gegenstandes mit sich bringt.

Vor Kurzem ist in Deutschland behauptet worden, dass die Quaternionen nur einen besondern Fall eines allgemeinen Systems bilden, das von Grassmann aufgestellt wurde. Dass Grassmann's allgemeine Untersuchungen umfassend genug sind, um die i, j, k der Quaternionen einzuschliessen, ist sehr wahrscheinlich. Man kann

aber mit noch grösserm Rechte behaupten, dass die ganze Quaternionenrechnung ein specieller Fall der allgemeinen Theorie der *Sets* ist, in der Hamilton schon zu wichtigen Ergebnissen gelangt war, ehe Grassmann irgend etwas über den Gegenstand veröffentlicht hatte.

Es ist keine Herabsetzung der aussergewöhnlichen Begabung des Herrn Grassmann, wenn ich sage, dass die zuerst publicirte und bis jetzt einzige einfache und brauchbare Methode, die *Sets* allgemein auf den Raum anzuwenden, die Methode Hamilton's ist.

Grassmann's Werk ist sehr werthvoll wegen des Aufschlusses, den es über die Theorie gibt; das Werk Hamilton's ist vor allem ein praktisches Instrument zur Forschung. In einer Anmerkung auf Seite 62 der Vorrede zu seinen „Lectures on Quaternions“ (Dublin, 1853, 8°.) gibt Sir W. R. Hamilton folgende Erklärung, die jener Behauptung zuvorkommt:

„Ich muss hier bemerken, dass eine Art von *nichtcommutativer* Multiplication für Gerade, die gegeneinander geneigt sind (äussere Multiplication) in einem sehr originellen und merkwürdigen Buche von Prof. H. Grassmann (Ausdehnungslehre, Leipzig, 1844) vorkommt; allein ich wurde mit dem Buche erst bekannt, nachdem Jahre seit der Erfindung und Veröffentlichung der Quaternionen verflossen waren. In jenem Werke fand ich auch, aber zu spät, um es an andern Orten mitzutheilen, das Symbol $\beta - \alpha$ angewendet, um die Gerade, die von dem Punkte α nach dem Punkte β gezogen ist, der Länge und Richtung nach zu bezeichnen (Strecke). Obwohl unsere Ansichten in diesem und vielleicht einigen andern Punkten zusammentreffen, so scheinen dennoch das System von Professor Grassmann und das meinige vollständig verschieden und von einander unabhängig zu sein in ihrer Auffassung, in ihren Methoden und Resultaten. Dass der gründliche und philosophische Verfasser der Ausdehnungslehre zur Zeit ihrer Veröffentlichung nicht im Besitze der Theorie der *Quaternionen* war, die ich im vorhergehenden Jahre (1843) als eine Art „*Organ*“ oder „*calculus*“ für sphärische Trigonometrie angewandt habe, scheint aus einem Abschnitte seiner Vorrede hervorzugehen, in welchem er angibt (unter dem Datum des 28. Juni 1844), dass es ihm bis dahin noch nicht gelungen sei, die Anwendung der *imaginären Grössen von der Ebene auf den Raum auszudehnen*, und dass unüberwundene Schwierigkeiten sich seinen Versuchen entgegengestellt hätten, aus seinen Principien die Gesetze zur Theorie der *Winkel im Raume* herzuleiten. (Hingegen ist es nicht mehr möglich, vermittelst des Imaginären auch die Gesetze für den Raum abzuleiten. Auch stellen sich überhaupt der Betrachtung

der Winkel im Raume Schwierigkeiten entgegen, zu deren allseitiger Lösung mir noch nicht hinreichende Musse geworden ist.“ [Ausdehnungslehre, Vorrede p. XIV.])

Das grösste unter all den Verdiensten, die sich Hamilton um die Wissenschaft erworben hat, besteht also darin, eben jene Anwendung gemacht zu haben, von der Grassmann ausdrücklich erklärt, dass es ihm an Musse gefehlt habe, dieselbe zu machen. Hamilton hat jenen Anwendungen eine solche Ausdehnung gegeben, die Bedeutung seiner Methode so klar dargestellt und dieselbe bis zu einem solchem Grade der Entwickelung geführt, wie vor ihm kein anderer Erfinder einer neuen Rechnungsart.

Edinburg, 9. August 1880.

P. G. Tait.

Inhaltsverzeichniss.

Kapitel I. **Vectoren und deren Zusammensetzung** . . . . . 1—24

Versuche, die gemacht wurden, das Imaginäre der Algebra geometrisch darzustellen. §§ 1—13.

De Moivre's Satz, erklärt durch eine Drehung in der Ebene. § 8.

Merkwürdige Betrachtung von Servois. § 11.

Elementare geometrische Vorstellungen in Bezug auf relative Lage. § 15.

Definition eines *Vectors*. Kann gebraucht werden, um eine *Translation* darzustellen. § 16.

Ausdruck eines Vectors durch ein Symbol, das implicite drei verschiedene Zahlen enthält. Erweiterung der Bedeutung des Zeichens $=$. § 18.

Das Zeichen $+$, definirt in Uebereinstimmung mit der Deutung eines Vectors, als eine Translation darstellend. § 19.

Definition von $-$. Es legt den Vector einfach um. § 20.

Dreiecke und Polygone von Vectoren, entsprechend Vectoren und gleichzeitigen Geschwindigkeiten. § 21.

Sind zwei Vectoren *parallel*, so hat man

$$\alpha = x\beta. \quad \S\ 22.$$

Jeder beliebige Vector kann ausgedrückt werden durch drei nicht-complanare Vectoren, nach der Formel

$$\varrho = x\alpha + y\beta + z\gamma,$$

aus der man die drei Zahlen erkennt, von denen der Vector abhängt. § 23.

Jeder Vector in der Ebene von α und β kann geschrieben werden

$$\varrho = x\alpha + y\beta. \quad \S\ 24.$$

Die Gleichung $\omega = \varrho$

zwischen zwei Vectoren ist gleichbedeutend mit drei Gleichungen zwischen Zahlen. § 25.

Das *commutative* und das *associative* Gesetz gelten für das Zusammensetzen von Vectoren durch die Zeichen $+$ und $-$. § 27.

Die Gleichung $\varrho = x\beta,$

wo ϱ ein veränderlicher, β ein fester Vector ist, stellt eine Gerade dar, die durch den Anfangspunkt geht und β parallel ist;

$$\varrho = \alpha + x\beta$$

ist die Gleichung einer Geraden, die durch den Endpunkt von α geht und β parallel ist. § 28.

$$\varrho = y\alpha + x\beta$$

stellt die Ebene dar, die durch den Anfangspunkt geht und α und β parallel ist. § 29.

Die Bedingung dafür, dass die Endpunkte von ϱ, α, β in derselben Geraden liegen, ist

$$p\varrho + q\alpha + r\beta = 0,$$

wenn $$p + q + r = 0$$

identisch erfüllt ist. Dem entsprechend bedeutet

$$p\varrho + q\alpha + r\beta + s\gamma = 0$$

mit $$p + q + r + s = 0,$$

dass die Endpunkte von vier Vectoren in einer Ebene liegen. § 30.

Beispiele mit Lösungen. § 31.

Differentiation eines Vectors, der als Function Einer Zahl gegeben ist. §§ 32–38.

Ist die Gleichung einer Curve

$$\varrho = \varphi(s)$$

wo s die Länge des Bogens bedeutet, so ist $d\varrho$ eine Vectortangente der Curve und die Länge derselben ist ds. §§ 38, 39.

Beispiele mit Lösungen. §§ 40—44.

Uebungsbeispiele zu Kapitel I. . . . . 24—26

Kapitel II. **Producte und Quotienten von Vectoren** . . . . 27—50

Hier wird gezeigt, was eine Quaternion ist. Das Product zweier paralleler Vectoren ist eine Zahl. §§ 45, 46.

Stehen dieselben aufeinander senkrecht, so ist deren Quotient ein Vector, der auf ihrer Ebene senkrecht steht. § 47, 72.

Sind dieselben nicht parallel und stehen sie auch nicht senkrecht aufeinander, so enthält der Quotient im allgemeinen *vier* verschiedene Zahlen und wird deshalb eine *Quaternion* genannt. § 47.

Die Quaternion betrachtet als Operator, der einen Vector in den andern überführt. Dieselbe kann zerlegt werden in zwei Factoren, die in beliebiger Ordnung aufeinander folgen können. Der *dehnende* Factor oder Tensor wird mit Tq bezeichnet, den *drehenden* Factor oder Versor bezeichnet man mit Uq. § 48.

Die Gleichung $$\beta = q\alpha$$

liefert $\frac{\beta}{\alpha} = q$ oder $\beta\alpha^{-1} = q$; aber *im allgemeinen ist nicht*

$$\alpha^{-1}\beta = q. \quad \S\ 49.$$

q oder $\beta\alpha^{-1}$ hängt nur ab von den relativen Längen und Richtungen von β und α. § 50.

Die *Reciproke* einer Quaternion wird definirt,

$$q = \frac{\beta}{\alpha} \text{ liefert } \frac{1}{q} \text{ oder } q^{-1} = \frac{\alpha}{\beta},$$

$$T.q^{-1} = \frac{1}{Tq}, \qquad U.q^{-1} = (Uq)^{-1}. \quad \S\ 51.$$

Definition der *Conjugirten* einer Quaternion

$$Kq = (Tq^2)q^{-1},$$

$$qKq = Kq.q = (Tq)^2. \quad \S\ 52.$$

Darstellung vonVersoren durch Bögen auf der Einheits-Kugel. § 53.
Versor-Multiplication erläutert durch die Zusammensetzung von Bögen. § 54.
Beweis, dass $K(qr) = KrKq$. § 55.
Beweis des associativen Gesetzes der Multiplication

$$p \,.\, qr = pq \,.\, r. \quad \S\S\ 57—60.$$

[Bemerkungen über sphärische Kegelschnitte. § 59.*]
Die Quaternionen-Addition und Subtraction sind *commutativ*. § 61.
Die Quaternionen-Multiplication und Division sind *distributiv*. § 62.
Gleichungen, denen *Quadrant*versoren in Ebenen, die aufeinander senkrecht stehen, genügen. Nennt man dieselben i, j, k, so ist

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \qquad ij = -ji = k, \qquad jk = -kj = i,$$

$$ki = -ik = j. \qquad ijk = -1. \quad \S\S\ 64—71.$$

Ein Einheits-Vector als Factor kann betrachtet werden als Quadrantversor, dessen Ebene auf jenem Vector senkrecht steht. Jene Gleichungen gelten also für jedes System von rechtwinkligen Einheits-Vectoren i, j, k. § 72.
Das Product und der Quotient zweier Vectoren, die aufeinander senkrecht stehen, ist ein dritter Vector, der auf beiden senkrecht steht. Hieraus

$$K\alpha = -\alpha,$$

und $$(T\alpha)^2 = \alpha K\alpha = -\alpha^2. \quad \S\ 73.$$

Jeder Versor kann dargestellt werden als eine Potenz eines Einheits-Vectors. § 74.
Jede Quaternion kann dargestellt werden als Potenz eines Vectors. § 75.
Das Exponentengesetz gilt für die Multiplication und Division von Quaternionen. § 76.
Die Quaternion betrachtet als Summe einer *Scalar* und eines *Vectors*.

$$q = \frac{\beta}{\alpha} = x + \gamma = Sq + Vq. \quad \S\ 77.$$

Beweis, dass $SKq = Sq, \qquad VKq = -Vq.$ § 79.
Viergliedriger Ausdruck für eine Quaternion

$$q = w + ix + jy + kz.$$

Eine Gleichung zwischen Quaternionen ist gleichbedeutend mit *vier* Gleichungen zwischen Zahlen (oder Scalaren). § 80.
Zweiter Beweis des *distributiven* Gesetzes der Multiplication. § 81.
Algebraische Bestimmung der Bestandtheile des Productes und des Quotienten zweier Vectoren. §§ 82—84.
Zweiter Beweis des *associativen* Gesetzes der Multiplication. § 85.
Beweis der Formeln

$$S\alpha\beta = S\beta\alpha$$

$$V\alpha\beta = -V\beta\alpha$$

$$\alpha\beta = K\beta\alpha,$$

$$S \,.\, qrs = S \,.\, rsq = S \,.\, sqr,$$

$$S \,.\, \alpha\beta\gamma = S \,.\, \beta\gamma\alpha = S \,.\, \gamma\alpha\beta = -S \,.\, \alpha\gamma\beta \text{ u.s.w. } \S\S\ 86—89.$$

Beweis der Formeln

$$V.\alpha V\beta\gamma = \gamma S\alpha\beta - \beta S\gamma\alpha,$$
$$V.\alpha\beta\gamma = \alpha S\beta\gamma - \beta S\gamma\alpha + \gamma S\alpha\beta,$$
$$V.\alpha\beta\gamma = V.\gamma\beta\alpha,$$
$$V.V\alpha\beta V\gamma\delta = \alpha S.\beta\gamma\delta - \beta S.\alpha\gamma\delta$$
$$= \delta S.\alpha\beta\gamma - \gamma S.\alpha\beta\delta,$$
$$\delta S.\alpha\beta\gamma = \alpha S.\beta\gamma\delta + \beta S.\gamma\alpha\delta + \gamma S.\alpha\beta\delta$$
$$= V\alpha\beta S\gamma\delta + V\beta\gamma S\alpha\delta + V\gamma\alpha S\beta\delta. \quad §§ 90—92.$$

Hamilton's Beweis, dass das Product zweier paralleler Vectoren eine Scalar sein muss, und das Product von zwei aufeinander senkrecht stehenden Vectoren ein Vector, wenn in der Quaternionenrechnung keine Richtung im Raume vor der andern etwas voraus haben soll. § 93.

Uebungsbeispiele zu Kapitel II. 50, 51

Kapitel III. **Deutung und Umformung von Quaternionenausdrücken** 52—72

Ist ϑ der Winkel zwischen zwei Vectoren α und β, so haben wir:

$$S\frac{\beta}{\alpha} = \frac{T\beta}{T\alpha}\cos\vartheta, \qquad S\alpha\beta = -T\alpha T\beta\cos\vartheta,$$

$$TV\frac{\beta}{\alpha} = \frac{T\beta}{T\alpha}\sin\vartheta. \qquad TV\alpha\beta = T\alpha T\beta\sin\vartheta.$$

Anwendung auf die ebene Trigonometrie. §§ 94—97.

$S\alpha\beta = 0$

bedeutet, dass α auf β senkrecht steht.

$V\alpha\beta = 0$

bedeutet, dass α und β parallel sind.

$S.\alpha\beta\gamma$

ist der Inhalt des Parallelepipedons, das die drei in einer Ecke zusammenstossenden Kanten α, β, γ hat.

$S.\alpha\beta\gamma = 0$

bedeutet also, dass α, β, γ complanar sind.

$S.\alpha\beta\gamma$ dargestellt als Determinante. §§ 98—102.

Beweis, dass $(Tq)^2 = (Sq)^2 + (TVq)^2$,

und $T(qr) = TqTr$. § 103.

Einfache Sätze aus der ebenen Trigonometrie. § 104.

Nachzuweisen, dass $-\alpha\beta\alpha^{-1}$ der reflectirte Vectorstrahl ist, wenn β der einfallende Strahl ist, und α die Normale der spiegelnden Fläche. § 105.

Deutung von $\alpha\beta\gamma$, wenn es ein Vector ist. § 106.

Beispiele der Mannichfaltigkeit von einfachen Transformationen. § 107.

Einleitung in die sphärische Trigonometrie. §§ 108—113.

Graphische Darstellung des sphärischen Excesses durch Quaternionen. §§ 114, 115.

Geometrische Oerter, dargestellt durch verschiedene Gleichungen — Punkte, Linien, Flächen, Körper. §§ 116—119.

Nachzuweisen, dass $r^{-1}(r^2q^2)^{\frac{1}{2}}q^{-1} = U(rq + KrKq)$. § 120.

Beweis der Umformung

$$(S\alpha\varrho)^2 + (S\beta\varrho)^3 + (S\gamma\varrho)^2 = \left(\frac{T(\iota\varrho + \varrho\varkappa)}{\varkappa^2 - \iota^2}\right)^2,$$

wo $2\left\{\begin{matrix}\iota\\ \varkappa\end{matrix}\right\} = \frac{T\alpha \pm T\gamma}{T\alpha\, T\gamma}\left(\sqrt{\frac{\beta^2-\alpha^2}{\gamma^2-\alpha^2}}\, U\alpha \pm \sqrt{\frac{\gamma^2-\beta^2}{\gamma^2-\alpha^2}}\, U\gamma\right)$. §§ 121, 122.

Biquaternionen. §§ 123—125.

Bequeme Abkürzungen der Bezeichnungsweise. §§ 126, 127.

Uebungsbeispiele zu Kapitel III. . . . . 72—74

Kapitel IV. **Differentiation der Quaternionen** . . . . . 75—80

Definition des Differentials

$$dr = dFq = L_\infty n\left\{F\left(q + \frac{dq}{n}\right) - Tq\right\},$$

wo dq eine beliebige Quaternion ist.
Wir können schreiben

$$dFq = f(q, dq),$$

wo f linear und homogen in dq ist; aber im allgemeinen kann man nicht schreiben $dFq = \mathrm{f}(q)dq$. §§ 128—131.

Definition des Differentials einer Function von mehr als einer Quaternion $d(qr) = qdq + dr\,.\,r$; aber nicht allgemein: $d(qr) = qdr + rdq$. § 132.

Beweis, dass $$\frac{dT\varrho}{T\varrho} = S\frac{d\varrho}{\varrho},$$

$$\frac{dU\varrho}{U\varrho} = V\frac{d\varrho}{\varrho}$$ u. s. w. § 133.

Successive Differentiation. Taylor's Satz. §§ 134, 135.
Ist die Gleichung einer Fläche

$$F(\varrho) = C,$$

so kann das Differential geschrieben werden

$$S\nu d\varrho = 0,$$

wo ν eine Vectornormale der Fläche ist. § 137.

Uebungsbeispiele zu Kapitel IV. 81

Kapitel V. **Die Lösung der Gleichungen ersten Grades** . . 82—108

Die allgemeine Gleichung ersten Grades in einer unbekannten Quaternion kann geschrieben werden

$$\Sigma V\,.\,aqb + S\,.\,cq = d,$$

wo a, b, c, d gegebene Quaternionen sind.
Elimination von Sq und Reduction auf die Vectorgleichung

$$\varphi\varrho = \Sigma\,.\,\alpha S\beta\varrho = \gamma.$$ §§ 138, 139.

Allgemeiner Beweis, dass $\varphi^3\varrho$ dargestellt werden kann als lineare Function von ϱ, $\varphi\varrho$ und $\varphi^2\varrho$. § 140.

Werth von φ für das Ellipsoid, als Beispiel zur Erläuterung der allgemeinen Theorie. § 141—143.

Hamilton's Lösung von $\varphi\varrho = \gamma$.

Schreiben wir $S\sigma\varphi\varrho = S\varrho\varphi'\sigma$,

so nennt man die Functionen φ und φ' conjugirt, und

$$m\varphi^{-1}V\lambda\mu = V\varphi'\lambda\varphi'\mu.$$

Beweis, dass m, dessen Werth geschrieben werden kann

$$\frac{S.\varphi'\lambda\varphi'\mu\varphi'\nu}{S.\lambda\mu\nu},$$

dasselbe ist für alle Werthe von λ, μ, ν §§ 144—146.

Beweis, dass, wenn

$$m_g = m + m_1 g + m_2 g^2 + g^3$$

wo $$m_1 = \frac{S(\lambda\varphi'\mu\varphi'\nu + \varphi'\lambda\mu\varphi'\nu + \varphi'\lambda\varphi'\mu\nu)}{S.\lambda\mu\nu}$$

und $$m_2 = \frac{S(\lambda\mu\varphi'\nu + \varphi'\lambda\mu\nu + \lambda\varphi'\mu\nu}{S.\lambda\mu\nu},$$

(welche, wie m_1, Invarianten sind),

dass dann $m_g(\varphi+g)^{-1}V\lambda\mu = (m\varphi^{-1} + g\chi + g^2)V\lambda\mu$;

und dass $$\chi = m_2 - \varphi,$$

woraus schliesslich die Lösung folgt

$$m\varphi^{-1} = m_1 - m_2\varphi + \varphi^2. \quad \text{§§ 147, 148.}$$

Beispiele. §§ 149—161.

Die fundamentale cubische Gleichung ist

$$\varphi^3 - m_2\varphi^2 + m_1\varphi - m = (\varphi - g_1)(\varphi - g_2)(\varphi - g_3) = 0.$$

Wenn φ selbstconjugirt ist, sind die Wurzeln der cubischen Gleichung reell; und die Gleichung

$$V\varrho\varphi\varrho = 0,$$

oder $$(\varphi - g)\varrho = 0$$

wird erfüllt durch ein System von drei reellen und aufeinander senkrecht stehenden Vectoren.

Geometrische Deutung dieser Ergebnisse. §§ 162—166.

Beweis der Umformung

$$\varphi\varrho = f\varrho + hV.(i+ek)\varrho(i-ek),$$

wo $$(\varphi - g_1)i = 0,$$

$$(\varphi - g_3)k = 0,$$

$$e^2 = \frac{g_2 - g_3}{g_1 - g_2},$$

$$f = \tfrac{1}{2}(g_1 + g_3),$$

$$h = -\tfrac{1}{2}(g_1 - g_2).$$

Eine weitere Umformung ist

$$\varphi\varrho = a\alpha V\alpha\varrho + b\beta S\beta\varrho. \quad \text{§§ 167—169.}$$

Andere Eigenschaften von φ.

Beweis, dass

$$S\varrho(\varphi+g)^{-1}\varrho = 0, \quad \text{und} \quad S\varrho(\varphi+h)^{-1}\varrho = 0,$$

dieselbe Fläche darstellen, wenn

$$mS\varrho\varphi^{-1}\varrho = gh\varrho^2.$$

Beweis, dass, wenn φ nicht selbst conjugirt ist

$$\varphi\varrho = \varphi'\varrho + V\varepsilon\varrho.$$

Beweis, dass, wenn

$$q = \alpha\varphi\alpha + \beta\varphi\beta + \gamma\varphi\gamma,$$

wo α, β, γ beliebige rechtwinklige Einheits-Vectoren sind, man hat

$$Sq = -m_2, \qquad Vq = \varepsilon.$$

Diese Quaternion kann in der wichtigen Form ausgedrückt werden

$$q = \nabla\varphi\varrho. \quad §§ 170—174.$$

Grade der Unbestimmtheit der Lösung einer Quaternionengleichung. — Beispiele. §§ 175—179.

Die lineare Function einer Quaternion wird gegeben durch eine symbolische biquadratische Gleichung. § 180.

Besondere Formen der linearen Gleichungen. §§ 181—183.

Eine Quaternionengleichung m^{ten} Grades bedingt im allgemeinen eine Scalargleichung vom Grade m^4. § 184.

Lösung der Gleichung $q^2 = qa + b$. § 185.

Uebungsbeispiele zu Kapitel V. . . . . 108—111

Kapitel VI. **Geometrie der Geraden und der Ebene** . . . 112—126

Uebungsbeispiele zu Kapitel VI. . . . . 126—128

Kapitel VII. **Die Kugel und der Kreiskegel** . . . . . 129—142

Uebungsbeispiele zu Kapitel VII. . . . . 142—144

Kapitel VIII. **Flächen zweiter Ordnung** . . . . . 145—164

Uebungsbeispiele zu Kapitel VIII. . . . . 164—168

Kapitel IX. **Krumme Linien und Flächen** . . . . . 169—204

Uebungsbeispiele zu Kapitel IX. . . . . 204—212

Kapitel X. **Kinematik** . . . . . 213—239

Ist $\varrho = \varphi t$, der Vector eines sich bewegenden Punktes, ausgedrückt durch die Zeit, so ist $\dot{\varrho}$ die Vectorgeschwindigkeit, nnd $\ddot{\varrho}$ die Vectorbeschleunigung.

$\sigma = \dot{\varrho} = \varphi'(t)$ ist die Gleichung des Hodographen.

$\ddot{\varrho} = \dot{v}\varrho' + v^2\varrho''$ liefert die Normal- und die Tangentialbeschleunigung.

$V\varrho\ddot{\varrho} = 0$, wenn die Beschleunigung nach einem Punkte gerichtet ist, woraus $V\varrho\dot{\varrho} = \gamma$.

Beispiele. — Planetenbeschleunigung. Hier ist die Gleichung

$$\ddot{\varrho} = \frac{\mu U\varrho}{T\varrho^2},$$

wo $V\varrho\dot{\varrho} = \gamma$ gegeben ist. Hieraus folgt die Gleichung des Hodographen

$$\dot{\varrho} = \varepsilon\gamma^{-1} - \mu U\varrho . \gamma^{-1},$$

und die Bahn ist der Schnitt von

$$\mu T\varrho = S\varepsilon(\gamma^2\varepsilon^{-1} - \varrho).$$

und der Ebene $S\gamma\varrho = 0.$

Epitrochoiden u. s. w. §§ 336—348.

Rotation eines starren Systems. Zusammensetzung von Rotationen. Der Operator $q^s(\ )q^{-s}$ dreht das System, auf welches er angewandt wird, um $2s$ mal den Winkel von q um die Achse von q. Wird die Lage eines Systems zur Zeit t aus der Anfangslage hergeleitet durch $q(\ )q^{-1}$, so ist die augenblickliche Drehungsachse

$\varepsilon = 2V\dot{q}q^{-1}$. §§ 349—359.

Homogene Deformation. Kriterium der reinen Deformation. Trennung der Rotation von der reinen Deformation. Ausziehen der Quadratwurzel einer reinen Deformation. Eine Deformation φ kann zerlegt werden in eine reine Deformation $\sqrt{\varphi'\varphi}$ und eine darauf folgende Rotation $\frac{\varphi}{\sqrt{\varphi'\varphi}}$. Einfache Schiebung. §§ 360—367.

Deformation von Punktsystemen. Die dadurch entstehende Condensation und Rotation. Vorbereitungen zum Gebrauche von ∇. §§ 368—371.

Trägheitsmoment. § 372.

Uebungsbeispiele zu Kapitel X. . . . . 240—243

Kapitel IX. **Physikalische Anwendungen** . . . . . 244—322

Die Bedingung des Gleichgewichts eines starren Systems ist $\Sigma S.\beta\delta\alpha = 0$, wo β eine Vectorkraft ist, α der Angriffspunkt derselben. Hieraus folgen die gewöhnlichen sechs Gleichungen in der Form $\Sigma\beta = 0$, $\Sigma V\alpha\beta = 0$. Centralachse, Satz von Minding u. s. w. §§ 373—378.

Für die Bewegung eines starren Systems ist

$$\Sigma S(m\ddot{\alpha} - \beta)\delta\alpha = 0;$$

hieraus folgen die üblichen Formeln. Die Gleichung

$$2\dot{q} = q\varphi^{-1}(q^{-1}\gamma q),$$

wo γ ausgedrückt ist durch t und q, wenn Kräfte wirken, sonst aber constant ist, enthält die ganze Theorie der Bewegung eines starren Körpers, von dem ein Punkt fest liegt. Dieselbe wird zurückgeführt auf die gewöhnliche Form

$$\frac{dt}{2} = \frac{dw}{W} = \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}.$$

Wirken keine Kräfte, so sind W, X, Y, Z *homogene* Functionen dritten Grades in w, x, y, z. Gleichung für die Präcession. §§ 379—401.

Allgemeine Gleichung der Bewegung des Pendels. Foucault's Pendel. §§ 402—405.

Aufgabe über spiegelnde Flächen. § 406.

Fresnel's Theorie der doppelten Brechung. Verschiedene Formen der Gleichung von Fresnel's Wellenfläche:

$$S.\varrho(\varphi - \varrho^2)^{-1}\varrho = -1, \qquad T(\varrho^{-2} - \varphi^{-1})^{-\frac{1}{2}}\varrho = 0,$$

$$1 = -p\varrho^2 \mp (T \pm S)V\lambda\varrho\, V\mu\varrho.$$

Die conischen Nabelpunkte und Berührungskreise. Schwingungslinien u. s. w. §§ 407—427.

Electrodynamik. Die Vectorwirkung eines geschlossenen Stromes auf das Element eines Stromes α_1 ist $V\alpha_1\beta$ proportional, wo

$$\beta = \int \frac{V\alpha\, d\alpha}{T\alpha^3} = \int \frac{dU\alpha}{\alpha},$$

wo die Integration sich über den Stromkreis erstreckt. Wechselwirkung zweier geschlossener Ströme und zweier Solenoide. Wechselwirkung von Magneten. Die verschiedenen möglichen Ausdrücke für die Kraft, die ein Element eines linearen Leiters auf das Element eines andern ausübt. Potential eines geschlossenen Stromes. Magnetische Curven. §§ 428—448.

Physikalische Anwendungen von

$$\nabla = i\frac{d}{dx} + j\frac{d}{dy} + k\frac{d}{dz}.$$

Wirkung von ∇ auf verschiedene Functionen von $\varrho = ix + jy + kz$.

$$\nabla\varrho = -3, \qquad \nabla T\varrho = U\varrho, \qquad \nabla U\varrho = -\frac{2}{T\varrho}.$$

$$\nabla S\alpha\varrho = -\alpha, \qquad \nabla V\alpha\varrho = 2\alpha.$$

Anwendung des Satzes

$$S.\delta\varrho\nabla\frac{V\alpha\varrho}{T\varrho^3} = \delta S.\alpha\nabla\frac{1}{T\varrho}. \quad \text{§§ 449—457.}$$

Weitere Untersuchung über den Gebrauch von ∇, angewandt auf die Verschiebung von Punktgruppen. Beweis des fundamentalen Satzes zum Vergleich von einem Integral, das sich über eine geschlossene Fläche erstreckt, mit einem Integral, das sich über den Raum erstreckt, den diese Fläche einschliesst:

$$\iiint S.\nabla\sigma\, d\mathbf{s} = \iint S.\sigma U\nu\, ds.$$

Hieraus Green's Satz. Beschränkungen und Vieldeutigkeiten. §§ 458—476.

Aehnlicher Satz für doppelte und einfache Integrale

$$\int S.\sigma\, d\varrho = \iint S.U\nu\nabla\sigma\, ds.$$

Anwendung dieser Gleichungen auf Vertheilungen von Magnetismus und auf Ampère's *Directrice*. Auch auf die Druckfunction. § 477—491.

$$\varepsilon^{-S\sigma\nabla} f(\varrho) = f(\varrho + \sigma).$$

Anwendungen und Folgerungen. Trennung von Operationszeichen und deren Behandlung als Grössen. §§ 492—495.

Anwendung von ∇ auf die Variationsrechnung. Wenn

$$A = \int QTd\varrho, \text{ so liefert } \delta A = 0, \qquad \frac{d}{ds}(Q\varrho') - \nabla Q = 0.$$

Anwendung auf variirende Wirkung, Brachistochronen, Kettenlinien. §§ 496—504.

Thomson's Satz, dass es eine und nur eine Lösung gibt von

$$S.\nabla(e^2\nabla u) = 4\pi r. \quad \text{§ 505.}$$

Vermischte Beispiele . . . . . 322—331

Druckfehler.

Seite 3, Zeile 11 v. o. lies $\frac{b}{a}$ statt $\frac{a}{b}$

„ 47, „ 7 „ „ „ K „ k

„ 81, „ 11 „ „ „ $v =$ „ $V =$

Quaternionen.

Kapitel I.

Vectoren und deren Zusammensetzung.

1.) Mehr als anderthalb Jahrhundert hindurch speculirten die Mathematiker mit Vorliebe über die geometrische Darstellung der negativen und imaginären algebraischen Grössen -1 und $\sqrt{-1}$, oder wie einige zu schreiben vorziehen — und $-\frac{1}{2}$. Fast sämmtliche Vorschläge laufen darauf hinaus, Ausdrücke anzuwenden, welche die Richtung, nicht die Länge von Geraden geben.

2.) So sah man schon vor langer Zeit, dass, wenn man die positiven Grössen in einer Richtung auf eine feste Achse auftrug, eine nützliche und zulässige Uebereinkunft erlaube, negative Grössen derselben Art auszudrücken durch Strecken, die man auf derselben Achse, aber in entgegengesetzter Richtung auftrug.

Diese Uebereinkunft ist ein wesentlicher Bestandtheil der Methode des Cartesius und wird beständig benutzt in der analytischen Geometrie und in der angewandten Mathematik.

3.) Gegen das Ende des siebzehnten Jahrhunderts schlug Wallis vor, die imaginären Wurzeln einer quadratischen Gleichung darzustellen, indem man aus der Geraden hinausging, auf welcher die reellen Grössen aufgetragen werden. Seiner Construction zu Folge hat man $\sqrt{-1}$ anzusehen als eine Gerade von der Länge Eins, die senkrecht steht auf der Geraden, auf welcher die positiven Grössen aufgetragen werden.

4.) Nach der gewöhnlichen Bezeichnungsweise der analytischen Geometrie der Ebene kömmt dies bei der Anwendung von rechtwinkligen Achsen darauf hinaus, jede Längeneinheit in der Richtung Oy als $+\sqrt{-1}$, in der Richung Oy' als $-\sqrt{-1}$ zu betrachten, während auf Ox jede Einheit gleich ist $+1$, auf Ox' hingegen -1.

Betrachten wir diese vier Geraden in cyklischer Aufeinanderfolge, das heisst in der Richtung der positiven Drehung (nämlich

entgegengesetzt der Bewegung des Uhrzeigers), so haben wir:

$$1, \quad \sqrt{-1}, \quad -1, \quad -\sqrt{-1}.$$

In dieser Reihe entsteht jedes Glied aus dem vorhergehenden durch Multiplication mit $\sqrt{-1}$.

Dem zu Folge kann man $\sqrt{-1}$ als ein Operationszeichen ansehen, entsprechend einer Handhabe, die auf der xy-Ebene senkrecht steht. Die Wirkung dieses Zeichens auf irgend eine Gerade besteht in einer Drehung von 90^0 (in positiver Richtung) um den Coordinaten-Anfangspunkt.

5.) In einem derartigen System wird ein Punkt durch einen einzigen imaginären Ausdruck festgelegt. So kann man $a + b\sqrt{-1}$ als eine einfache Grösse betrachten, die den Punkt bestimmt, dessen Coordinaten a und b sind.

Man kann aber auch den Ausdruck betrachten als eine Darstellung der Geraden, welche den Punkt (a, b) mit dem Coordinaten-Anfangspunkte verbindet. In diesem Sinne enthält der Ausdruck $a + b\sqrt{-1}$ die Richtung sowohl als die Länge der Geraden; denn man sieht sofort, dass die Gerade mit der x-Achse einen Winkel einschliesst, dessen Tangente ist $\frac{b}{a}$; die Länge der Geraden aber ist $\sqrt{a^2 + b^2}$.

6.) Wenden wir auf dies Symbol das Operationszeichen $\sqrt{-1}$ an, so erhalten wir $-b + a\sqrt{-1}$ und dieser Ausdruck bestimmt den Punkt dessen x- und y-Coordinaten sind $-b$ und a; oder aber die Gerade, welche diesen Punkt mit dem Anfangspunkte verbindet.

Die Länge dieser Geraden ist ebenfalls $\sqrt{a^2 + b^2}$, doch schliesst dieselbe mit der x-Achse den Winkel $\tan^{-1}\left(\frac{-a}{b}\right)$*) ein. Dieser Winkel übertrifft offenbar um 90^0 den Winkel, den jene Gerade, auf welche wir operirten, mit der x-Achse einschloss.

7.) Der Satz von de Moivre führt uns noch weiter in dieser Richtung. Wendet man statt $\sqrt{-1}$ den allgemeinen Factor $\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha$ an, so sieht man, dass dessen Wirkung auf eine Gerade in einer Drehung um den Anfangspunkt besteht. Diese Drehung findet statt in der xy-Ebene, in positiver Richtung, und ihre Grösse ist α.

Der frühere Factor ist augenscheinlich nur ein specieller Fall für $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

---

*) Oder in der gewöhnlichen Schreibweise arc tan $\left(-\frac{a}{b}\right)$.

Man hat nun durch direkte Multiplication

$$(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha)(a + b\sqrt{-1})$$
$$= a\cos\alpha - b\sin\alpha + \sqrt{-1}\,(a\sin\alpha + b\cos\alpha).$$

Der Leser sieht leicht, dass eine Drehung um den Winkel α stattgefunden hat, wenn er sich an die gewöhnliche Formel erinnert, welche die Drehung der Coordinatenachsen um einen bestimmten Winkel angibt. Oder auf weniger einfache Art:

Länge $= \sqrt{(a\cos\alpha - b\sin\alpha)^2 + (a\sin\alpha + b\cos\alpha)^2}$

$= \sqrt{a^2 + b^2}$ wie früher.

Neigung zur x-Achse:

$$= \tan^{-1}\frac{a\sin\alpha + b\cos\alpha}{a\cos\alpha - b\sin\alpha} = \tan^{-1}\frac{\tan\alpha + \frac{b}{a}}{1 - \frac{a}{b}\tan\alpha}$$

$$= \alpha + \tan^{-1}\frac{b}{a}.$$

8.) Wir sehen jetzt gleichsam weshalb

$$(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha)^m = \cos m\alpha + \sqrt{-1}\sin m\alpha.$$

In der That der erste Factor bewirkt m aufeinander folgende Drehungen in derselben Richtung, jede um denselben Winkel α; der zweite eine einzige Drehung um den Winkel $m\alpha$.

9.) Es mag von Interesse sein, schon jetzt vorzugreifen und anzuführen, dass allgemein eine Quaternion in folgende Form gebracht werden kann:

$$N(\cos\vartheta + \omega\sin\vartheta).$$

N ist eine numerische Grösse, ϑ ein reeller Winkel und $\omega^2 = -1$.

Dieser Ausdruck für eine Quaternion hat grosse Aehnlichkeit in der Form mit den Ausdrücken, die in de Moivre's Satz vorkommen. Der Grundunterschied, und hierauf beruht eben Hamilton's Entdeckung, ist, dass ω nicht das algebraische $\sqrt{-1}$ bedeutet, sondern jedwede Einheits-Gerade mit beliebiger Richtung im Raume bedeuten kann.

10.) In diesem Jahrhundert haben Argand, Warren und andere die Ergebnisse von Wallis und de Moivre weiter ausgedehnt. Sie versuchten das Product zweier Geraden, deren jede durch ein Symbol ähnlich dem Ausdruck $a + b\sqrt{-1}$ gegeben ist, ebenfalls als eine Gerade darzustellen. Bis zu einem gewissen Grade gelang ihnen dies auch; aber sie gelangten nicht zu einfachen Resultaten, wie die furchtbare Reihe von Wurzelausdrücken in Warren's Abhandlungen zeugt.

11.) Eine sehr merkwürdige Untersuchung von Servois, die

1813 in Gergonne's Annalen erschien, enthält die einzigen bekannt gewordenen Betrachtungen, die auf die Quaternionen hindeuten könnten. Bei dem Versuche, die Form $a + b\sqrt{-1}$, die für die Ebene gilt, auf den Raum auszudehnen, wird er durch Analogie geleitet, für eine Richtungs-Einheits-Gerade die Form aufzustellen

$$p\cos\alpha + q\cos\beta + r\cos\gamma,$$

wo α, β, γ die Neigung gegen die drei Achsen bestimmen. Er sieht leicht ein, dass p, q, r keine reellen Grössen sein können, aber er fragt: „seraient-elles imaginaires reductibles à la forme générale $A + B\sqrt{-1}$?“ Dies konnte er nicht beantworten. In der That sind es die i, j, k des Quaternionen-Calcüls. (Siehe Kapitel II.)

12.) Ausser diesem sind in frühern Zeiten wenig Versuche gemacht worden, oder wenigstens bekannt geworden, dies Princip auf den dreidimensionalen Raum auszudehnen; und obgleich in den letzten vierzig Jahren viele derartige Versuche angestellt wurden, so hat keiner derselben, mit alleiniger Ausnahme des Hamilton'schen, als Resultat einfache und praktische Methoden aufzuweisen. Wie geistreich die übrigen auch sein mochten, so führten sie doch sofort zu den verwickeltsten Operationen und Rechnungen. Für eine klare, vollständige und höchst unparteiische Darstellung der Ansprüche seiner Vorgänger auf diesem Felde verweisen wir auf die Vorrede zu Hamilton's „Lectures on Quaternions“.

13.) Hamilton war es vorbehalten, die Anwendung von $\sqrt{-1}$ als eine geometrische Wirklichkeit, die an keine Richtung im Raume gebunden ist, zu entdecken. Und diese Anwendung ward die Grundlage der ausserordentlich eleganten und doch so mächtigen Quaternionen-Rechnung.

Alle andern Systeme, die $\sqrt{-1}$ als ein Richtungszeichen im Raume ansehen, drücken Eine Richtung durch reelle Zahlen aus, während die übrigen Richtungen durch imaginäre Grössen irgend welcher Art gegeben sind, und führen im allgemeinen zu heterogenen Gleichungen. Hamilton hingegen macht sämmtliche Richtungen im Raume gleich imaginär oder vielmehr gleich reell, und gibt dadurch seiner Methode die Fähigkeit, jede Richtung im Raume auf gleiche Weise zu behandeln.

In der That werden wir sehen, dass die Quaternionen-Rechnung von der Richtung der Achsen unabhängig ist und sich nur auf Linien bezieht, die durch die zu behandelnde Aufgabe selbst gegeben sind.

14.) Für eine elementare Darstellung dieser Methode ist es wohl am zweckmässigsten, sich so nahe als möglich an die gewöhnliche analytische Geometrie des Raumes anzuschliessen. In der That

ist diese nur ein specieller Fall der Quaternionen, in welchem die meisten der charakteristischen Züge verloren gegangen sind.

Wir werden finden, dass die Quaternionen-Rechnung sich von der Methode des Cartesius ganz frei machen kann, nachdem sie diese zu ihrer Begründung benutzt hat. Ja wie die Werke des Entdeckers zur Genüge zeigen, kann sie „ab initio“ auf verschiedenen Wegen begründet werden, ohne auch nur der Geometrie des Cartesius zu erwähnen.

Da dieses Werk für Leser bestimmt ist, die wenigstens mit den Elementen der analytischen Geometrie vertraut sind, so halten wir uns an die erst angegebene Art der Darstellung, besonders deshalb, weil wir auf diese Weise einige Betrachtungen umgehen, die, obwohl streng und schön, doch durch ihre Subtilität den Anfänger abschrecken möchten.

Wir beginnen deshalb mit einigen sehr elementaren geometrischen Vorstellungen.

15.) A und B seien zwei Punkte im Raume. A sei gegeben, von wie vielen Zahlen hängt dann die relative Lage von B ab?

Beziehen wir uns auf drei Coordinatenachsen, so sehen wir, dass gegeben sein muss der Ueberschuss der drei Coordinaten von B über die entsprechenden Coordinaten von A. Es sind also drei Zahlen erfordert.

Wir können auch Polarcoordinaten wählen. Um die Lage des Mondes zur Erde zu bestimmen muss gegeben sein dessen geocentrische Breite und Länge, oder die Rectascension und Declination und hierzu dessen Entfernung oder Radius vector. Wiederum drei.

16.) Besonders zu bemerken ist, dass nichts ausgesagt wird über die wirklichen Coordinaten weder von A noch von B.

Daraus folgt, dass jeder Ausdruck wie $\overline{AB}$, der eine Gerade bezeichnet, in Bezug auf Richtung und Länge implicite drei Zahlen enthält; und alle Geraden, die $\overline{AB}$ gleich und parallel sind, hängen in derselben Weise von jenen drei Zahlen ab. Folglich *können alle parallelen Geraden von gleicher Länge durch dasselbe Symbol dargestellt werden, und dieses Symbol enthält drei Zahlen.*

In diesem Sinne wird eine Gerade Vector genannt, da wir auf ihr von einem Endpunkte A zum anderen B gelangen können.

Wir können dieselbe als das Werkzeug betrachten, das A nach B überführt; so dass ein Vector benutzt werden kann, eine bestimmte Uebertragung im Raume vorzustellen.

17.) Wir können hier ein für allemal bemerken, dass bei der Begründung einer neuen Rechnungsmethode es uns frei steht, irgend

welche Definition unserer Symbole zu geben, vorausgesetzt, dass nie zwei derselben sich widersprechen. Einfachheit und so zu sagen Natürlichkeit waren das Ziel des Erfinders der Quaternionen.

18.) $\overline{AB}$ soll dargestellt werden durch α, dann wissen wir, dass α von drei verschiedenen Zahlen abhängt. Es sei nun CD von gleicher Länge wie AB. Sind diese Geraden auch noch parallel, so haben wir offenbar $\overline{CD} = \overline{AB} = \alpha$, und man sieht, dass das Gleichheitszeichen zwischen Vectoren implicite enthält Gleichheit der Länge und Parallelismus der Richtung. Bis jetzt haben wir die Bedeutung eines algebraischen Symbols *erweitert*. Zu bemerken ist, dass eine Gleichung zwischen Vectoren wie

$$\alpha = \beta$$

drei Gleichungen zwischen einfachen Zahlen enthält.

19.) Wir haben jetzt $+$ in der neuen Rechnungsart zu definiren und die Bedeutung von $-$ wird daraus folgen.

Es seien A, B, C irgend welche drei Punkte und es sei (bei obiger Bedeutung von $=$)

$$\overline{AB} = \alpha, \qquad \overline{BC} = \beta, \qquad \overline{AC} = \gamma.$$

Definiren wir $+$ (in Uebereinstimmung mit der Vorstellung, dass ein Vector eine Ueberführung bedeutet) durch die Gleichung

$$\alpha + \beta = \gamma$$

oder

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC},$$

so entsteht kein Widerspruch mit dem Vorhergehenden, aber wir führen dadurch die Vorstellung ein, dass *Vectoren sich zusammensetzen, der Richtung und Grösse nach, wie gleichzeitige Geschwindigkeiten eines Punktes.*

Einen Grund hierfür kann man noch auf andere Weise sehen, wenn wir uns erinnern, dass durch die Addition der Differenzen der Cartesianischen Coordinaten von A und B zu denen von B und C, wir die Differenzen der Coordinaten von A und C erhalten. Folglich gehen diese Differenzen linear in den Ausdruck für einen Vector ein.

20.) Andererseits sehen wir, dass, wenn A und C zusammenfallen (wo C irgend ein Punkt sein mag)

$$AC = 0,$$

denn es bedarf in diesem Falle keines Vectors, um A nach C überzuführen. Obige Gleichung kann in diesem Falle also geschrieben werden

$$\overline{AB} + \overline{BA} = 0,$$

oder, indem wir das Zeichen — einführen und eben durch jene Gleichung definiren:

$$\overline{AB} = -\overline{BA}.$$

Folglich *bedeutet das Symbol —, auf einen Vector angewandt, einfach, dass man dessen Richtung umzukehren hat.*

Und dies ist in Uebereinstimmung mit allem Vorhergehenden. Z. B.

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

und
$$\overline{AB} = \overline{AC} - \overline{BC}$$

oder
$$= \overline{AC} + \overline{CB}$$

sind offenbar nur verschiedene Ausdrücke für dieselbe Thatsache.

In jedem Dreieck ABC haben wir selbstverständlich:

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0;$$

und in jedem geschlossenen Polygon, in der Ebene oder im Raume:

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \ldots + \overline{YZ} + \overline{ZA} = 0.$$

Für jedes Polygon gilt auch

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \ldots + \overline{YZ} = \overline{AZ}.$$

Dies sind die wohlbekannten Sätze, welche sich auf die Zusammensetzung von Geschwindigkeiten beziehen, und welche nach dem zweiten Bewegungsgesetz uns die geometrischen Gesetze liefern zur Zusammensetzung von Kräften.

22.) Setzen wir eine beliebige Zahl von parallelen Vectoren zusammen, so ist das Resultat offenbar ein numerisches Vielfache irgend eines derselben.

Befinden sich A, B, C in einer Geraden, so ist

$$\overline{BC} = x\overline{AB},$$

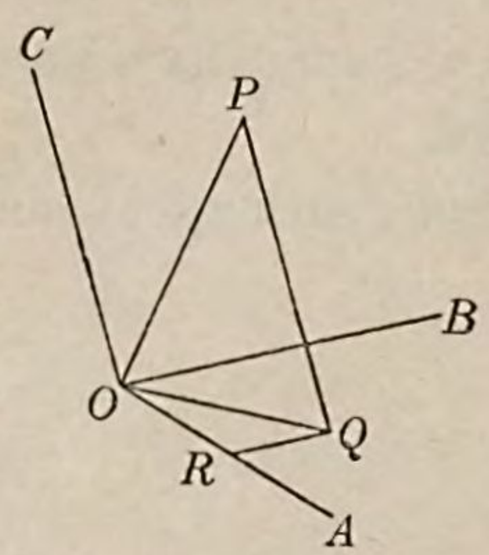
wo x eine Zahl bedeutet, positiv wenn B zwischen A und C liegt, negativ in jedem andern Falle. Der numerische Werth x, abgesehen vom Zeichen, ist das Verhältniss der Länge von BC zur Länge von AB. Dies ist augenscheinlich, wenn AB und BC commensurabel sind, und kann leicht auf incommensurable Grössen ausgedehnt werden durch die gewöhnliche „reductio ab absurdum“.

23.) Ein wichtiger, aber fast selbstverständlicher Satz ist folgender: *„Jeder Vector kann zerlegt werden, und blos auf eine Art zerlegt werden, in drei Componenten, die drei gegebenen Vectoren parallel sind, wenn diese nicht complanar*) und auch nicht zwei derselben einander parallel sind.*

---

*) Vectoren heissen complanar, wenn sie sämmtlich einer und derselben Ebene parallel sind.

Es seien OA, OB, OC die gegebenen Vectoren, OP ein beliebiger anderer Vector. Von P ziehe man PQ parallel mit CO, Q sei der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Ebene BOA. (Der Punkt Q muss ein bestimmter sein, sonst wäre PQ und also auch CO der Ebene parallel, was gegen die Annahme ist.) Von Q ziehe man QR parallel mit BO; es sei R der Schnittpunkt von OA und QR. Dann haben wir



$$\overline{OP} = \overline{OR} + \overline{RQ} + \overline{QP} \quad (\S\ 21)$$

und diese Componenten sind den drei gegebenen Vectoren parallel. Nach § 22 können wir $\overline{OR}$ ausdrücken als ein numerisches Vielfache von $\overline{OA}$, $\overline{RQ}$ von $\overline{OB}$ und $\overline{QB}$ von $\overline{OC}$. Wir haben also, allgemein, für jeden Vector, ausgedrückt durch drei feste nicht complanare Vectoren, α, β, γ,

$$\overline{OP} = \varrho = x\alpha + y\beta + z\gamma.$$

Es ist die eine der Formen, welche die drei Zahlen zeigt, von denen ein Vector abhängt (§ 16). Hier sind x, y, z vollkommen bestimmte Grössen und können nur einen einzigen Werth haben.

24.) Dem entsprechend kann jeder Vector, der wie $\overline{OQ}$ in derselben Ebene mit $\overline{OA}$ und $\overline{OB}$ liegt, in zwei Componenten zerlegt werden, in der Richtung von $\overline{OA}$ und $\overline{OB}$; so lange wenigstens, als jene beiden Vectoren nicht parallel sind.

25.) In gewissen Fällen ist es von Vortheil, sich auf ein System von drei unter einander senkrechten Einheitsvectoren zu beziehen. Dies System bezeichnet Hamilton mit i, j, k. Jeder andere Vector kann dann ausgedrückt werden durch:

$$\varrho = xi + yj + zk.$$

Da i, j, k Einheitsvectoren bedeuten, so sind x, y, z die Längen der in einem Eckpunkte zusammenstossenden Kanten eines rechtwinkeligen Parallelepipedons, dessen Vector-Diagonale ϱ ist. Die Länge von ϱ ist somit

$$= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Es sei $$\omega = \xi i + \eta j + \zeta k$$

ein beliebiger anderer Vector; nach § 23 umfasst dann die Vectorgleichung

$$\varrho = \omega$$

folgende drei Gleichungen zwischen Zahlen

$$x = \xi, \qquad y = \eta, \qquad z = \zeta.$$

Nehmen wir an, i sei nach Osten gerichtet, j nach Norden und k nach oben, so ist das gleichbedeutend mit dem Ausspruch, dass, *wenn zwei Punkte zusammenfallen, dieselben gleichweit östlich (oder westlich) von demselben Punkte liegen, gleichweit nördlich (oder südlich) von demselben, und dass sie gleichviel über dessen Niveau erhoben (oder unter dasselbe hinuntergedrückt) sind.*

26.) Besonders zu bemerken ist, dass nur, wenn α, β, γ nicht einer Ebene parallel sind, eine Vectorgleichung

$$\varrho = \omega$$

oder $$x\alpha + y\beta + z\gamma = \xi\alpha + \eta\beta + \zeta\gamma$$

die drei numerischen Gleichungen zur Folge hat:

$$x = \xi, \qquad y = \eta, \qquad z = \zeta.$$

Denn sind α, β, γ complanar (§ 24), so gilt eine Gleichung folgender Gestalt:

$$\gamma = a\alpha + b\beta;$$

hieraus: $$\varrho = (x + za)\alpha + (y + zb)\beta$$
$$\omega = (\xi + \zeta a)\alpha + (\eta + \xi b)\beta,$$

und die Gleichung $$\varrho = \omega$$

bedingt nur die zwei numerischen Gleichungen

$$x + za = \xi + \zeta a, \qquad y + zb = \eta + \xi b.$$

27.) *Das commutative*) und das associative Gesetz bleiben gültig bei der Zusammensetzung von Vectoren durch die Zeichen + und —.*

Man sieht leicht, dass es genügt, diesen Satz für das + Zeichen zu beweisen, denn das Zeichen — vor einem Vector bedeutet einfach, dass man denselben umzulegen hat, ehe man ihn als positiv betrachtet.

Es seien A, B, C, D in ihrer Aufeinanderfolge die Ecken eines Parallelogramms. Es ist dann:

$$\overline{AB} = \overline{DC}, \qquad \overline{AD} = \overline{BC}$$

und $$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC} = \overline{BC} + \overline{AB}.$$

Das commutative Gesetz ist also gültig bei der Addition von irgendwelchen zwei Vectoren und gilt deshalb allgemein.

Anderseits, welche vier Punkte auch immer durch A, B, C, D dargestellt werden mögen, haben wir:

$$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AC} + \overline{CD},$$

---

*) Operationen werden commutativ genannt, wenn das Resultat unabhängig ist von der Reihenfolge, in welcher dieselben ausgeführt werden; associativ wenn das Resultat nicht abhängt von der Gruppirung.

oder, indem wir für $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{AC}$ ihre Werthe in diesen drei Ausdrücken einführen,

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}=\overline{AB}+(\overline{BC}+\overline{CD})=(\overline{AB}+\overline{BC})+\overline{CD}.$$

Und somit ist die Gültigkeit des associativen Gesetzes erwiesen.

28.) Die Gleichung

$$\varrho = x\beta,$$

wo ϱ der Vector ist, der einen variabeln Punkt mit dem Coordinatenanfangspunkt verbindet, β ein gegebener Vector und x eine unbestimmte Zahl, stellt die Gerade dar, die parallel mit β durch den Anfangspunkt gelegt ist. (§ 22.)

Die Gerade, welche durch A parallel mit β läuft, wo $\overline{OA}=\alpha$, hat die Gleichung

$$\varrho = \alpha + x\beta. \qquad (1)$$

In Worten bedeutet dies: wir können von O direct nach P gelangen auf dem Vector $\overline{OP}$ oder ϱ; oder aber wir können nach A gehen auf $\overline{OA}$ oder α und von dort nach P auf einem β parallelen Vector (§ 16).

Gleichung (1) ist eine der vielen nützlichen Formen, in welche die Quaternionen gestatten, die Gleichung einer Geraden zu bringen.

Wie wir in § 25 gesehen, ist sie drei numerischen Gleichungen äquivalent; da diese aber die unbestimmte Grösse x einschliessen, so sind sie in Wirklichkeit nur mit zwei Gleichungen äquivalent, wie in der gewöhnlichen Geometrie von drei Dimensionen.

29.) Zur Erläuterung dieser Bemerkung mag die Thatsache dienen, dass die Gleichung

$$\varrho = y\alpha + x\beta,$$

welche zwei unbestimmte Grössen enthält, in Wirklichkeit einer einzigen numerischen Gleichung äquivalent ist. Man sieht leicht, dass sie die Ebene vorstellt, in welcher α und β liegen; oder die Fläche, die entsteht, wenn man durch jeden Punkt von $\overline{OA}$ eine $\overline{OB}$ parallele Gerade zieht.

In der That ist obige Gleichung nichts anderes als § 24 in Zeichen ausgedrückt.

Selbstverständlich ist die Gleichung

$$\varrho = \gamma + y\alpha + x\beta$$

die Gleichung einer Ebene, die α und β parallel durch den Endpunkt von γ gelegt ist.

Es ist nun leicht einzusehen, dass die Gleichung

$$\varrho = p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + \ldots = \Sigma p\alpha,$$

wo α_1, α_2 u. s. w. gegebene Vectoren sind, und p_1, p_2 u. s. w. numerische Grössen, eine Gerade darstellt, wenn $p_1, p_2 \ldots$ lineare Functio-

nen *einer* unbestimmten numerischen Grösse sind; eine Ebene hingegen, wenn die p lineare Ausdrücke sind, die zwei unbestimmte Grössen enthalten. Später § 31 (l) wird dieser Satz weiter ausgedehnt werden.

Die Gleichung

$$\varrho = x\alpha + y\beta + z\gamma$$

bezieht sich auf irgend welchen Punkt im Raume, vorausgesetzt, dass α, β, γ nicht complanar sind. (Oben § 23.)

30.) Die Gleichung einer Geraden, die zwei beliebige Punkte A und B verbindet, wo $\overline{OA} = \alpha$ und $\overline{OB} = \beta$, ist offenbar

$$\varrho = \alpha + x(\beta - \alpha)$$

oder

$$\varrho = \beta + y(\alpha - \beta).$$

Diese Gleichungen sind natürlich identisch, wie man sehen kann, indem man $1 - y$ statt x setzt.

Die erste jener Gleichungen kann man schreiben:

$$\varrho + (x - 1)\alpha - x\beta = 0$$

oder

$$p\varrho + q\alpha + r\beta = 0,$$

wo $p + q + r = 0$ identisch erfüllt sein muss. Das heisst: eine homogene lineare Function von drei Vectoren der Null gleichgesetzt, drückt aus, dass die Endpunkte der drei Vectoren in einer Geraden liegen, wenn die Summe der Coefficienten identisch Null ist.

Dem entsprechend ist die Gleichung der Ebene, welche die Endpunkte A, B, C der drei nicht complanaren Vectoren α, β, γ enthält:

$$\varrho = \alpha + x(\beta - \alpha) + y(\gamma - \beta),$$

wo x sowohl als y unbestimmt sind.

Dies kann man in die Form bringen

$$p\varrho + q\alpha + r\beta + s\gamma = 0$$

mit der identischen Relation

$$p + q + r + s = 0$$

und dies ist die Bedingung dafür, dass vier Punkte in einer Ebene liegen.

31.) Wir haben jetzt schon die Mittel, auf sehr einfache Weise eine Reihe von Sätzen aus der Geometrie der Ebene und des Raumes zu beweisen. Wir werden uns aber an dieser Stelle mit einigen wenigen Beispielen genügen, da wir kaum die Schwelle des Gegenstandes überschritten haben, und nur lineare Gleichungen behandeln, die zwei oder mehrere Vectoren verbinden, und selbst mit diesen sind wir bis jetzt auf Operationen der Addition beschränkt. Wir werden diese Beispiele mit einer peinlichen Genauigkeit in allen

Einzelnheiten durchführen, die dem Leser nur kurze Zeit nothwendig erscheinen wird, wenn sie überhaupt erforderlich ist.

(*a*) *Die Diagonalen eines Parallelogramms halbiren sich gegenseitig.*

Es sei $ABCD$ das Parallelogramm, O der Schnittpunkt der Diagonalen. Dann ist

$$\overline{AO} + \overline{OB} = \overline{AB} = \overline{DC} = \overline{DO} + \overline{OC},$$

hieraus
$$\overline{AO} - \overline{OC} = \overline{DO} - \overline{OB}.$$

Diese beiden Vectoren, die einander gleich gesetzt sind, sind den Diagonalen parallel.

Eine solche Gleichung hat keinen Sinn, wenn nicht

(1) die Diagonalen parallel sind; dann ist die Figur kein Parallelogramm;

(2) $\overline{AO} = \overline{OC}$ und $\overline{DO} = \overline{OB}$, der zu beweisende Satz.

(*b*) *Man zeige, dass ein Dreieck construirt werden kann, dessen Seiten parallel und gleich sind den Halbirungslinien der Seiten eines beliebigen Dreiecks.*

Es sei ABC ein beliebiges Dreieck, Aa, Bb, Cc die Halbirungslinien der Seiten.

Dann hat man:

$$\overline{Aa} = \overline{AB} + \overline{Ba} = \overline{AB} + \tfrac{1}{2}\overline{BC}$$
$$\overline{Bb} = \quad \ldots\ldots \quad = \overline{BC} + \tfrac{1}{2}\overline{CA}$$
$$\overline{Cc} = \quad \ldots\ldots \quad = \overline{CA} + \tfrac{1}{2}\overline{AB}.$$

folglich $\overline{Aa} + \overline{Bb} + \overline{Cc} = \tfrac{3}{2}(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}) = 0.$

Der Satz ist somit bewiesen (§ 21).

Ebenso:
$$\overline{Aa} = \overline{AB} + \tfrac{1}{2}\overline{BC}$$
$$= \overline{AB} - \tfrac{1}{2}(\overline{CA} + \overline{AB})$$
$$= \tfrac{1}{2}(\overline{AB} - \overline{CA}) = \tfrac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC}),$$

Resultate, die manchmal von Nutzen sind. Man kann sie leicht verificiren, indem man $\overline{Aa}$ bis zur doppelten Grösse verlängert und den Endpunkt mit B verbindet.

(*b'*) *Die Halbirungslinien der Seiten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte, der ein Drittel einer jeden derselben abschneidet.*

Wir nehmen A als Anfangspunkt und bezeichnen mit α, β, γ Vectoren, die den Seiten des Dreiecks gleich und parallel sind, also BC, CA, AB entsprechen sollen. Die Gleichung von Bb ist (§ 28 (1))

$$\varrho = \gamma + x\left(\gamma + \frac{\beta}{2}\right) = (1+x)\gamma + \frac{x}{2}\beta.$$

Die von Cc dem entsprechend

$$\varrho = -(1+y)\beta - \frac{y}{2}\gamma.$$

In dem Punkte O, wo Bb und Cc sich schneiden,

$$\varrho = (1+x)\gamma + \frac{x}{2}\beta = -(1+y)\beta - \frac{y}{2}\gamma.$$

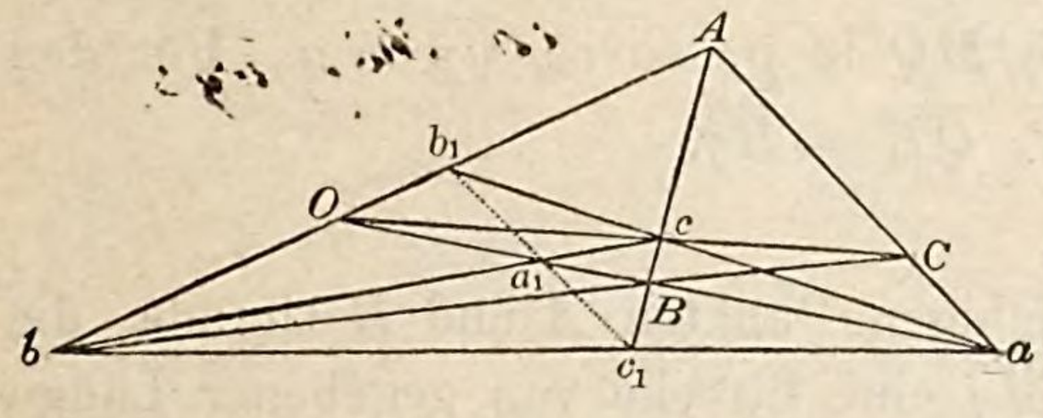
Da γ und β nicht parallel sind, so liefert diese Gleichung

$$1+x = -\frac{y}{2} \quad \text{und} \quad \frac{x}{2} = -(1+y)$$

hieraus: $$x = y = -\tfrac{2}{3}$$

folglich $$\overline{AO} = \tfrac{1}{3}(\gamma - \beta) = \tfrac{2}{3}\overline{Aa}.$$ (Siehe Beispiel (*b*).)

Da dies eine Vectorgleichung ist, so muss $\overline{Aa}$ durch O gehen und man sieht, dass $AO : Oa = 2 : 1$.



(*c*) Wenn $\overline{OA} = \alpha$

$\overline{OB} = \beta$

$\overline{OC} = a\alpha + b\beta$

drei gegebene, complanare Vectoren sind, und die in der Figur angegebenen Geraden gezogen werden, so liegen die Punkte a_1, b_1, c_1 *in einer Geraden.*

Wir erhalten durch durch das Verfahren des § 30:

$$\overline{Oc} = \frac{a\alpha + b\beta}{a+b}, \quad \overline{Ob} = \frac{a\alpha}{1-b}, \quad \overline{Oa} = \frac{b\beta}{1-a}.$$

Hieraus ergibt sich leicht:

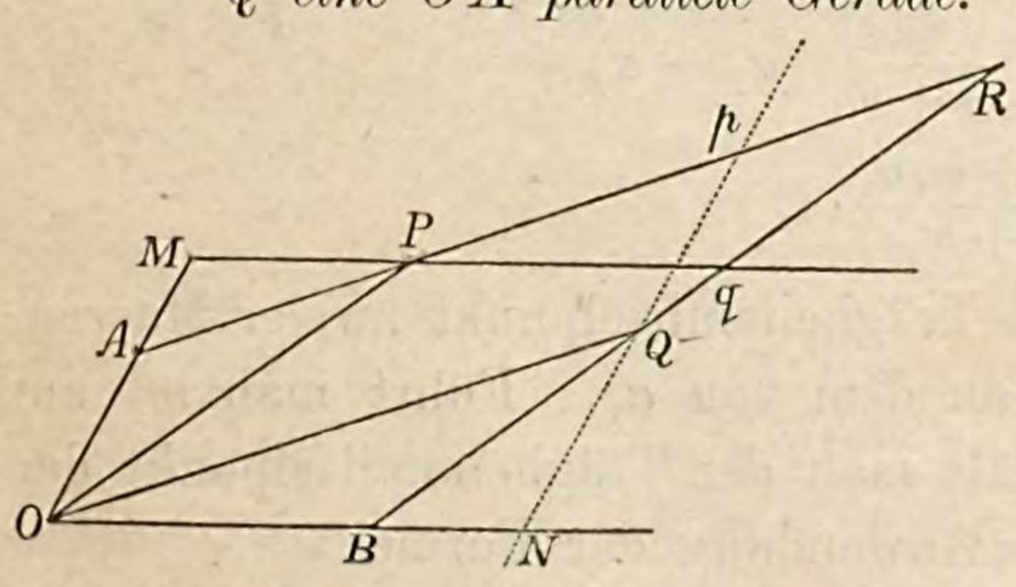
$$\overline{Oa_1} = -\frac{b\beta}{1-a-2b}, \quad \overline{Ob_1} = -\frac{a\alpha}{1-2a-b}, \quad \overline{Oc_1} = \frac{-a\alpha + b\beta}{b-a},$$

und $$-(1-a-2b)\overline{Oa_1} + (1-2a-b)\overline{Ob_1} - (b-a)\overline{Oc_1} = 0;$$

aber $$-(1-a-2b) + (1-2a-b) - (b-a) = 0,$$ identisch.

Nach § 30 beweist dies den Satz.

(*d*) Es seien $\overline{OA} = \alpha$, $\overline{OB} = \beta$ zwei beliebige Vectoren. *Wenn* MP, OB *parallel ist, und* OQ, BQ *den Geraden* AP *und* OP *parallel gezogen werden, so ist der geometrische Ort von* Q *eine* OA *parallele Gerade.*



Es sei $OM = ea$,

dann ist

$$AP = (\overline{e-1})\alpha + x\beta.$$

Hieraus folgt die Gleichung von OQ:

$$\varrho = y(\overline{e-1}\alpha + x\beta);$$

und die von BQ ist

$$\varrho = \beta + z(e\alpha + x\beta).$$

In Q haben wir also

$$\left.\begin{aligned} xy &= 1 + zx \\ y(e-1) &= ze \end{aligned}\right\}$$

Diese geben $xy = e$, und die Gleichung des geometrischen Ortes von Q ist

$$\varrho = e\beta + y'\alpha,$$

das heisst, eine OA parallele Gerade, die durch einen Punkt N geht, der auf der Verlängerung von OB liegt; und zwar hat man

$$ON : OB = OM : OA.$$

Cor. Schneidet BQ die Gerade MP in q, so ist ist $\overline{Pq} = \beta$; und schneidet OP die Gerade MQ in p, so ist $\overline{Qp} = \alpha$. Für den Punkt R hat man $\overline{pR} = \overline{AP}$, $\overline{QR} = \overline{Bq}$.

Hieraus folgt:

Zieht man von zwei beliebigen Punkten A und B Gerade, die auf der gegebenen Geraden Mq eine Strecke von gegebener Länge Pq abschneiden; trägt man ferner von ihrem Schnittpunkte R aus die Strecken ab $Rp = PA$ und $RQ = qB$, so liegen Q und p auf einer festen Geraden und die Länge Qp ist constant.

(e) *Den Trägheitsmittelpunkt eines beliebigen Systems zu bestimmen.*

Sind $\overline{OA} = \alpha$, $\overline{OB} = \alpha_1$ die Vectorenseiten eines Dreiecks, so ist der Vector, der von der Spitze ausgeht und die Basis AB in C so theilt, dass

$$BC : CA = m : m_1$$

$$\frac{m\alpha + m_1\alpha_1}{m + m_1},$$

denn $\overline{AB}$ ist $\alpha_1 - \alpha$ und folglich ist AC

$$= \frac{m_1}{m + m_1}(\alpha_1 - \alpha),$$

hieraus $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC}$

$$= \alpha + \frac{m_1}{m + m_1}(\alpha_1 - \alpha)$$

$$= \frac{m\alpha + m_1\alpha_1}{m + m_1}.$$

Dieser Ausdruck gibt den Trägheitsmittelpunkt zweier Massen, m am Endpunkte von α, m_1 an dem von α_1. Führt man m_2 am Endpunkte von α_2 ein, so erhält man den Trägheitsmittelpunkt der drei Massen durch eine zweite Anwendung der Formel

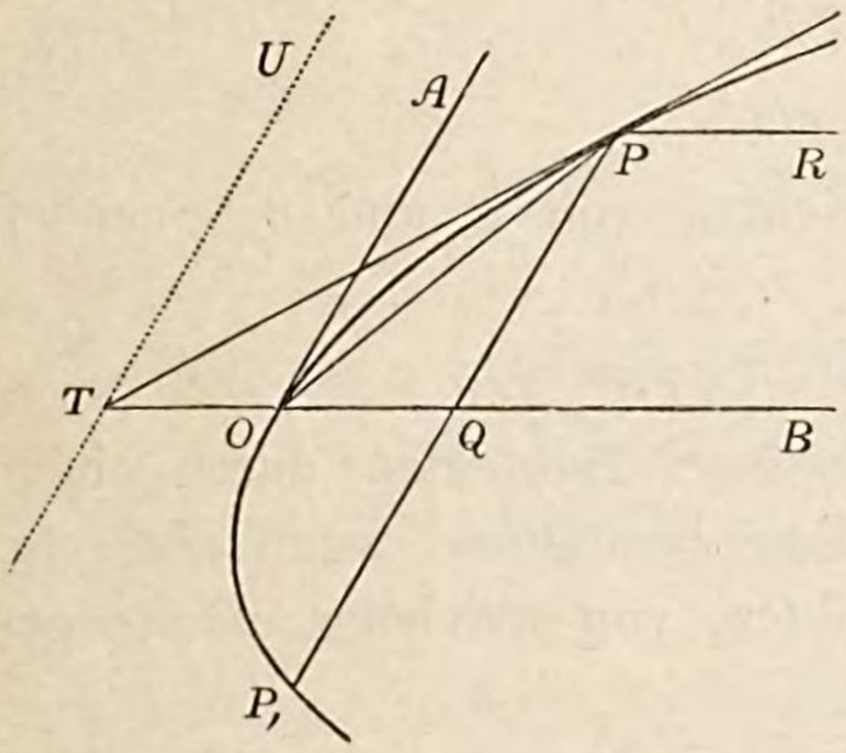
$$\frac{(m+m_1)\left(\frac{m\alpha+m_1\alpha_1}{m+m_1}\right)+m_2\alpha_2}{(m+m_1)+m_2}=\frac{m\alpha+m_1\alpha_1+m_2\alpha_2}{m+m_1+m_2}.$$

Für eine beliebige Anzahl von Massen m an den Endpunkten der Vectoren α ist der Vector des Trägheitsmittelpunktes:

$$\beta=\frac{\Sigma(m\alpha)}{\Sigma(m)},$$

dies kann man schreiben $\Sigma m(\alpha-\beta)=0$.

Nun ist aber $\alpha_1-\beta$ der Vector von m_1 bezogen auf den Trägheitsmittelpunkt. Hieraus folgt der Satz: *Vergrössert man den vom Trägheitsmittelpunkt ausgehenden Vector eines jeden Massenelementes im Verhältniss zur Masse jenes Elementes, so ist die Summe dieser sämmtlichen Vectoren gleich Null.*



(*f*) Wir sehen unmittelbar, dass die Gleichung

$$\varrho=\alpha t+\frac{\beta t^2}{2},$$

wo t eine unbestimmte Zahl, α und β gegebene Vectoren sind, eine Parabel darstellt. Der Anfangspunkt O ist ein Curvenpunkt, β ist der Achse parallel, d. h. es ist der durch den Anfangspunkt gehende Diameter, und OA ist die Tangente im Anfangspunkt. In der Figur:

$$\overline{QP}=\alpha t, \qquad \overline{OQ}=\frac{\beta t^2}{2}.$$

Die Secante, welche die Punkte verbindet, in denen t die Werthe t und t' hat, wird ausgedrückt durch die Gleichung:

$$\varrho=\alpha t+\frac{\beta t^2}{2}+x\left(\alpha t'+\frac{\beta t'^2}{2}-\alpha t-\frac{\beta t^2}{2}\right) \quad (\S\ 30)$$

$$=\alpha t+\frac{\beta t^2}{2}+x(t'-t)\left\{\alpha+\beta\frac{t'+t}{2}\right\}.$$

Setzt man $t=t'$ und schreibt man x statt $x(t'-t)$ (welches irgend welchen Werth haben kann), so wird die Gleichung der Tangente im Punkte t:

$$\varrho=\alpha t+\frac{\beta t^2}{2}+x(\alpha+\beta t).$$

Für $$x=-t, \qquad \varrho=-\frac{\beta t^2}{2}$$

d. h. die Tangente schneidet vom Diameter ein Stück ab, dessen Länge gleich ist der Abscisse des Berührungspunktes.

Ferner: Die Tangente ist parallel dem Vector $\alpha + \beta t$ oder $\alpha t + \beta t^2$ oder $\alpha t + \frac{\beta t^2}{2} + \frac{\beta t^2}{2}$ oder $\overline{OQ} + \overline{OP}$. Aber $\overline{TP} = \overline{TO} + \overline{OP}$, folglich $\overline{TO} = \overline{OQ}$.

(g) Da die Gleichung einer Tangente der Parabel ist:

$$\varrho = \alpha t + \frac{\beta t^2}{2} + x(\alpha + \beta t),$$

so wollen wir die Tangenten aufsuchen, die von einem gegebenen Punkte aus gezogen werden können.

Der Vector dieses Punktes sei

$$\varrho = p\alpha + q\beta \quad (\S\ 24).$$

Da die Tangente durch diesen Punkt gehen soll, so haben wir als Bedingungen zur Bestimmung von t und x:

$$t + x = p$$
$$\frac{t^2}{2} + xt = q;$$

indem wir die betreffenden Coefficienten von α und β einander gleich setzen.

Hieraus: $$t = p \pm \sqrt{p^2 - 2q}.$$

Im Allgemeinen kann man also zwei Tangenten durch einen gegebenen Punkt ziehen. Diese fallen zusammen, wenn $p^2 = 2q$, das heisst wenn der Vector des Punktes, von welchem aus sie gezogen werden sollen, ist:

$$\varrho = p\alpha + q\beta = p\alpha + \frac{p^2}{2}\beta,$$

d. h. wenn der Punkt *auf* der Parabel liegt. Sie sind imaginär, wenn $2q > p^2$, d. h. wenn der Punkt ist

$$\varrho = p\alpha + \left(\frac{p^2}{2} + r\right)\beta,$$

wo r eine positive Grösse bedeutet. Ein solcher Punkt liegt offenbar innerhalb der Curve, wie R z. B., wo

$$\overline{OQ} = \frac{p^2}{2}\beta, \quad \overline{QP} = p\alpha, \quad \overline{PR} = r\beta.$$

(h) Bezeichnet man die Werthe von t der beiden Tangenten, die in (g) bestimmt wurden, mit t_1 und t_2, so ist der Vector, der die Berührungspunkte verbindet,

$$\alpha t_1 + \frac{\beta t_1^{\,2}}{2} - \alpha t_2 - \frac{\beta t_2^{\,2}}{2},$$

und dieser ist parallel

$$\alpha + \beta \frac{t_1 + t_2}{2}.$$

Führt man die Werthe von t_1, t_2 aus (g) ein:

$$\alpha + p\beta.$$

Die Richtung desselben ist also unabhängig von q. In Worten ausgedrückt: Zieht man Tangentenpaare von Punkten eines verlängerten Durchmessers aus, so sind die Berührungssehnen der Tangente am Endpunkte des Durchmessers parallel. Ein früheres Resultat gibt schon denselben Satz, denn man hat $\overline{OT} = \overline{QO}$ für jede Tangente.

(i) Die Gleichung der Berührungssehne für den Punkt, dessen Vector ist

$$\varrho = p\alpha + q\beta,$$

ist demnach $$\varrho = \alpha t_1 + \frac{\beta t_1^{\,2}}{2} + y(\alpha + p\beta).$$

Nehmen wir an, dieselbe gehe stets durch den Punkt, dessen Vector ist

$$\varrho = a\alpha + b\beta.$$

Dann muss
$$\left.\begin{aligned} t_1 + y &= a \\ \frac{t_1^{\,2}}{2} + py &= b \end{aligned}\right\}$$

oder $$t_1 = p \pm \sqrt{p^2 - 2pa + 2b}\,.$$

Vergleicht man dies mit dem Ausdruck in (g), so findet man

$$q = pa - b;$$

das heisst der Punkt, von welchem aus die Tangente gezogen wurde, hat den Vector

$$\begin{aligned} \varrho &= p\alpha + (pa - b)\beta \\ &= -b\beta + p(\alpha + a\beta), \text{ eine Gerade (§ 28 (1)).} \end{aligned}$$

Schon in der Form dieses Ausdruckes liegt der Beweis der gewöhnlichen Eigenschaften des Pols und der Polare der Parabel; aber dem Anfänger zu Liebe wählen wir ein einfacheres aber eben so allgemeines Verfahren.

Es sei $a = 0$. Dies heisst, der Pol soll auf jenem Durchmesser liegen, auf welchen wir die Parabel beziehen. Dann ist Q der Pol, wenn

$$\varrho = b\beta;$$

und die Polare ist die Gerade TU, für welche

$$\varrho = -b\beta + p\alpha.$$

Somit ist die Polare eines beliebigen Punktes der Tangente parallel, die durch den Endpunkt des Durchmessers gelegt ist, auf welchem der Punkt sich befindet. Der Schnittpunkt der Polare und dieses Durchmessers liegt soweit über den Endpunkt desselben hinaus, als der Pol im Innern davon entfernt ist, und umgekehrt.

(j) Als ein weiteres Beispiel wollen wir folgenden Satz beweisen.

Wird ein Dreieck in eine Parabel eingeschrieben, so liegen die

drei Punkte, in denen die Seiten durch Tangenten an den Eckpunkten geschnitten werden, auf einer Geraden.

Da O ein beliebiger Punkt der Parabel ist, so können wir ihn zu einem Eckpunkte des Dreiecks wählen. t und t_1 sollen die beiden andern bestimmen. Sind ω_1, ω_2, ω_3 die Vectoren der Schnittpunkte der Tangenten und der Seiten des Dreiecks, so hat man:

$$\omega_1 = \frac{{t_1}^2}{2t_1 - t}\left(\alpha + \frac{t}{2}\beta\right)$$

$$\omega_2 = \frac{t^2}{2t - t_1}\left(\alpha + \frac{t_1}{2}\beta\right)$$

$$\omega_3 = \frac{tt_1}{t_1 + t}\alpha .$$

Dies liefert

$$\frac{2t_1 - t}{t_1}\omega_1 - \frac{2t - t_1}{t}\omega_2 - \frac{{t_1}^2 - t^2}{tt_1}\omega_3 = 0$$

und $$\frac{2t_1 - t}{t_1} - \frac{2t - t_1}{t} - \frac{{t_1}^2 - t^2}{tt_1} = 0 \text{ identisch.}$$

Demnach ist nach § 30 der Satz bewiesen.

(*k*) Andere interessante Beispiele dieser Methode, Curven zu behandeln, werden sich dem Leser von selbst darbieten.

So stellt $$\varrho = \alpha \cos t + \beta \sin t$$

oder $$\varrho = \alpha x + \beta\sqrt{1 - x^2}$$

eine Ellipse dar, und α und β sind conjugirte Halbmesser. Und

$$\varrho = \alpha t + \frac{\beta}{t} \quad \text{oder} \quad \varrho = \alpha \operatorname{tang} x + \beta \operatorname{cotg} x$$

stellt offenbar eine auf ihre Asymptoten bezogene Hyperbel dar.

Aber bis jetzt hat uns die Darlegung dieser Methode noch nicht die Mittel gegeben, die Länge von Vectoren und deren Neigung gegen einander zu bestimmen. Wir können deshalb nur eine kleine Classe der Eigenschaften der Curven untersuchen, die durch ähnliche Gleichungen wie oben dargestellt werden.

(*l*) Es ist hier der Ort, im Anschluss an den § 29 die selbstverständliche Bemerkung zu machen, dass

$$\varrho = \Sigma p\alpha$$

die Gleichung einer Curve im Raume ist, wenn die Zahlen p_1, p_2 u. s. w. Functionen Einer unbestimmten Grösse sind. In diesem Falle schreibt man die Gleichung manchmal

$$\varrho = \varphi(t).$$

Sind aber p_1, p_2 u. s. w. Functionen zweier unbestimmter Grössen, so ist der geometrische Ort von ϱ eine Fläche; man schreibt deren Gleichung auch zuweilen

$$\varrho = \varphi(t, u).$$

(*m*) So stellt die Gleichung

$$\varrho = \alpha \cos t + \beta \sin t + \gamma t$$

eine Schraubenlinie dar.

Hingegen $\varrho = p\alpha + q\beta + r\gamma$

verbunden mit $ap^2 + bq^2 + cr^2 = 1$

ist die Gleichung einer Centralfläche zweiter Ordnung, wo α, β, γ die Richtungen conjugirter Durchmesser sind. Sind a, b, c sämmtlich positiv, so ist die Fläche ein Ellipsoid.

32.) In dem obigen Beispiele (*f*) haben wir eine Operation ausgeführt, die gleichkömmt der Differentiation eines Vectors in Bezug auf eine einzige numerische Variabele, wo dieser Vector explicite als Function dieser Variabeln gegeben war. Da dies Verfahren von grossem Nutzen ist, besonders bei Quaternionen-Untersuchungen die sich auf die Bewegung einer Partikel oder eines Punktes beziehen, und da uns hierdurch Gelegenheit geboten wird, einen Schritt zu thun zur Erledigung der Schwierigkeiten, die bei der Quaternionen-Differentiation entstehen, so wollen wir einige Abschnitte einer eingehenden Darstellung derselben widmen.

33.) Es ist ein merkwürdiger Umstand, wenn wir bedenken, wie sehr Newton's ursprüngliche Methoden der Differentialrechnung verschrieen worden sind, dass Hamilton gezwungen war, dieselben anzuwenden und nicht die modernen Formen, um die der Quaternionen-Differentiation eigenthümlichen Schwierigkeiten zu überwinden. Ein Ding wie ein Differentialcoefficient hat überhaupt keinen Sinn hier, ausgenommen, wenn wir mit gleichsam entarteten Quaternionen zu thun haben, wie Zahlen, Cartesianische Coordinaten u. s. w. Aber ein Quaternionenausdruck hat immer ein Differential, und dies ist einfach was Newton Fluxion nannte.

Wie bei den Bewegungsgesetzen, der Basis der Dynamik, so bei der Begründung der Differentialrechnung, kommen wir allmälig zu dem Schlusse, dass Newton's Methode dennoch die beste ist.

34.) Es sei ϱ der Vector einer Curve im Raume. Dann kann im allgemeinen ϱ ausgedrückt werden als die Summe einer Reihe von Gliedern, deren jedes ein Multiplum eines gegebenen Vectors und eine Function von Einer Veränderlichen; oder, wie in § 31 (*l*), wenn P einen Punkt auf der Curve vorstellt:

$$\overline{OP} = \varrho = \varphi(t).$$

Dem entsprechend, wenn Q ein beliebiger anderer Punkt der Curve ist

$$\overline{OQ} = \varrho_1 = \varphi(t_1) = \varphi(t + \delta t),$$

wo δt eine beliebige Zahl ist.

Die Vectorsehne $\overline{PQ}$ ist demnach, strenge,

$$\delta\varrho = \varrho_1 - \varrho = \varphi(t+\delta t) - \varphi(t).$$

35.) *Da die Vectoren, die in φ vorkommen, constant sind, und ihre numerischen Coefficienten allein sich ändern,* so kann man nach Taylor's Satz den Ausdruck $\varphi(t+\delta t)$ entwickeln und erhält

$$\varphi(t) + \frac{d\varphi(t)}{dt}\delta t + \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2}\frac{(\delta t)^2}{1.2} + \ldots.$$

Hieraus:

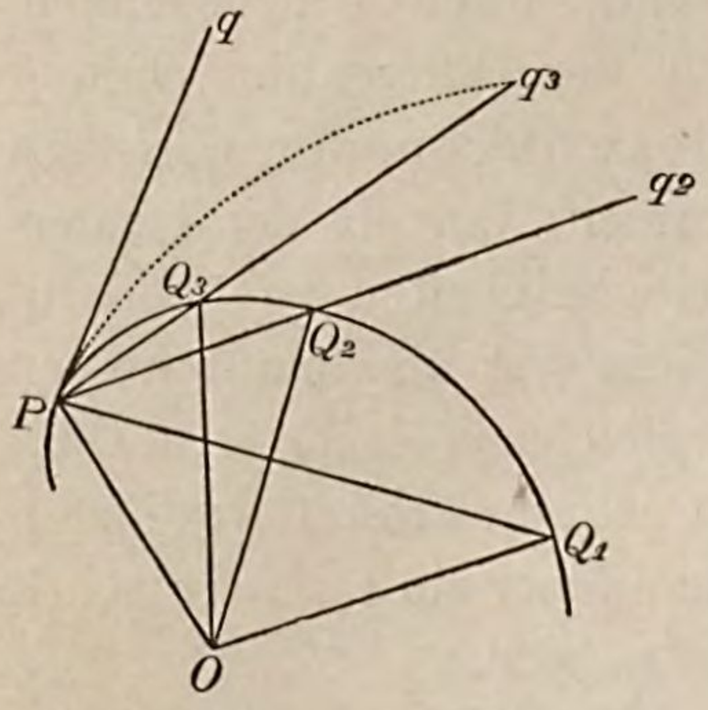
$$\delta\varrho = \frac{d\varphi(t)}{dt}\delta t + \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2}\frac{(\delta t)^2}{1.2} + \ldots.$$

Wird δt unendlich klein, so hat man

$$\text{Lim.}\left(\frac{\delta\varrho}{\delta t}\right)_{\delta t=0} = \frac{d\varrho}{dt} = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \varphi'(t).$$

In einem Falle wie diesem ist es also erlaubt, einen Vector zu differentiiren oder dessen Differentialcoefficienten zu bilden nach den gewöhnlichen Regeln der Differentialrechnung. Man erhält aber eine weit klarere Vorstellung des Processes, wenn man Newton's Methode anwendet.

36.) Es sei $\overline{OP} = \varrho = \varphi(t)$



und $\overline{OQ_1} = \varrho' = \varphi(t+dt)$,

wo dt eine beliebige Zahl bedeute.

In diesem Falle kann man annehmen, dass t die Zeit bedeute. Das heisst, wir können uns einen Punkt vorstellen, der die Curve auf solche Weise durchläuft, dass der Werth von t für den Vector des Punktes P das Zeitintervall bedeutet, welche seit einem bestimmten Zeitpunkte verflossen ist, wenn der Punkt in P ankömmt. Ist nun dt ein beliebiges Zeitintervall, endlich oder unendlich klein, so ist

$$\overline{OQ_1} = \varphi(t+dt)$$

der Vector des Punktes zur Zeit $t+dt$.

Aber dies gibt uns im allgemeinen wenig oder gar keinen Aufschluss über die Geschwindigkeit im Punkte P.

Wir erhalten einen Näherungswerth, wenn wir dt halbiren, und Q_2, die Lage des Punktes zur Zeit $t+\frac{dt}{2}$, bestimmen; dann ist $\overline{OQ_2} = \varphi\left(t+\frac{dt}{2}\right)$. Man kann die Bewegung dann so auffassen, als habe der Punkt in der Zeit $\frac{dt}{2}$ den Vector $\overline{PQ_2}$ durchlaufen. Um bei dieser Annahme den in dt durchlaufenen Weg zu erhalten,

hat man $\overline{PQ_2}$ doppelt zu nehmen, und man erhält somit als zweiten Näherungswerth für den Vector, den der Punkt in der Zeit dt beschreiben würde, wenn er in der Richtung und mit der Geschwindigkeit weiter ginge, die er in P besessen hat,

$$\overline{Pq_2} = 2\overline{PQ_2} = 2(\overline{OQ_2} - \overline{OP}) = 2\{\varphi(t + \tfrac{1}{2}dt) - \varphi(t)\}.$$

Der nächste Näherungswerth ist:

$$\overline{Pq_3} = 3\overline{PQ_3} = 3(\overline{OQ_3} - \overline{OP}) = 3\{\varphi(t + \tfrac{1}{3}dt) - \varphi(t)\}.$$

Und so fort; jeder Schritt bringt uns offenbar unserem Ziele näher. Um somit den Vector zu finden, der in der Zeit dt beschrieben worden wäre, wenn die Bedingung der Bewegung in P unverändert geblieben wäre, haben wir den Werth zu bestimmen von

$$d\varrho = \overline{Pq} = L_{x=\infty}\, x\left\{\varphi\left(t + \frac{1}{x}dt\right) - \varphi(t)\right\}.$$

Wir sahen, dass man in diesem speciellen Fall Taylor's Satz anwenden kann. Wir haben also:

$$d\varrho = L_{x=\infty}\, x\left\{\varphi'(t)\frac{1}{x}dt + \dot{\varphi}''(t)\frac{1}{x^2}\frac{(dt)^2}{1\,.\,2} + \ldots\right\} = \varphi'(t)dt.$$

Wenn man will, kann man jetzt schreiben $\frac{d\varrho}{dt} = \varphi'(t)$.

37.) Besonders zu beachten ist, dass in dieser ganzen Untersuchung die Grösse von dt gar nicht in Betracht gekommen ist. Die Frage, die hier gelöst worden ist, können wir jetzt in folgende Form fassen: *Ein Punkt beschreibt eine gegebene Curve in einer bestimmten Weise. In einem beliebigen Punkte hört die Beschleunigung der Bewegung plötzlich auf.* Welchen Weg wird er in einem beliebigen Zeitintervalle durchlaufen?

Wie Hamilton treffend bemerkt, ist dies für einen Planeten oder Cometen der Fall einer „himmlischen" Atwood'schen Maschine.

38.) Nehmen wir an, die Veränderliche, durch welche ϱ ausgedrückt wird, sei der Bogen s der Curve, von einem festen Punkte aus gemessen, so finden wir wie oben:

$$d\varrho = \varphi'(t)dt = \frac{\varphi'(t)ds}{\frac{ds}{dt}} = \varphi'(s)ds.$$

Aus der Frage selbst ersieht man, dass die Länge von $d\varrho$ hier gleich ds sein muss. Diese Bemerkung ist von Wichtigkeit, wie wir

später sehen werden; es ist deshalb nützlich, obiges Resultat auf eine andere Weise abzuleiten, ohne irgendwelche Beziehung auf Zeit und Geschwindigkeit.

39.) Wir halten uns strenge an das Verfahren von Newton's XVI. Lemma, und beschreiben auf Pq_2 einen Bogen ähnlich dem Bogen PQ_2. Je weiter nun die Theilung von ds fortschreitet, um so mehr nähert sich der neue Bogen, dessen Länge stets ds ist, der Geraden, welche den entsprechenden Näherungswerth von $d\varrho$ gibt.

40.) Zum Schluss wollen wir die Hyperbel nehmen:

$$\varrho = \alpha t + \frac{\beta}{t};$$

hier ist

$$d\varrho = \left(\alpha - \frac{\beta}{t^2}\right) dt.$$

Die Tangente ist somit dem Vector $\alpha t - \frac{\beta}{t}$ parallel. Das heisst:

Ist der Vector (vom Centrum aus) eines Punktes der Hyperbel die eine Diagonale des Parallelogramms, dessen Seiten auf den Asymptoten liegen, so ist die andere Diagonale der Tangente in diesem Punkte parallel.

41.) Wir wollen nun die Frage umkehren und *die Umhüllende einer Geraden suchen, die von zwei festen Achsen ein Dreieck von gegebenem Inhalt abschneidet.*

Haben die Achsen die Richtungen α und β, so kann man offenbar die Abschnitte schreiben αt und $\frac{\beta}{t}$. Demnach ist die Gleichung der Geraden

$$\varrho = \alpha t + x\left(\frac{\beta}{t} - \alpha t\right).$$

Die zu erfüllende Bedingung ist augenscheinlich (s. Kapitel IX):

$$d\varrho = 0.$$

Dies liefert: $$0 = \left\{\alpha - x\left(\frac{\beta}{t^2} + \alpha\right)\right\} dt + \left(\frac{\beta}{t} - \alpha t\right) dx^*),$$

hieraus $$(1 - x)\, dt - t\, dx = 0$$

und $$-\frac{x}{t^2} dt + \frac{dx}{t} = 0.$$

---

*) Wir dürfen hier nicht die Coefficienten von dt und dx gleich Null setzen; denn wir müssen bedenken, dass diese Gleichung die Form hat

$$0 = p\alpha + q\beta,$$

wo p und q Zahlen bedeuten; und dass, so lange α und β reelle und nicht parallele Vectoren bedeuten, die Existenz einer solchen Gleichung verlangt:

$$p = 0, \qquad q = 0.$$

Hieraus folgt zunächst $x = \frac{1}{2}$, da dx und dt unbestimmt sind. Demnach ist die Gleichung der Umhüllenden

$$\varrho = \alpha t + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\beta}{t} - \alpha t\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\alpha t + \frac{\beta}{t}\right),$$

eine Hyperbel wie oben; α und β sind Theile der Asymptoten.

42.) Der Leser gewinnt vielleicht eine bessere Einsicht in das obige Verfahren, wenn wir ihm eine etwas andere Form geben. So kann man die Gleichung der Umhüllenden schreiben:

$$\varrho = \alpha t(1 - x) + \beta \frac{x}{t},$$

hieraus $$d\varrho = 0 = \alpha\, d(t(1 - x)) + \beta\, d\left(\frac{x}{t}\right).$$

Da α und β nicht parallel sind, muss

$$d(t(1 - x)) = 0, \qquad d\left(\frac{x}{t}\right) = 0;$$

führt man die Rechnung aus, so erhält man die obigen Gleichungen.

43.) Zur weitern Erläuterung geben wir eine Lösung, die die Differentialrechnung nicht direkt anwendet.

Die Gleichungen irgend zweier der umhüllenden Linien sind

$$\varrho = \alpha t + x\left(\frac{\beta}{t} - \alpha t\right)$$

$$\varrho = \alpha t_1 + x_1\left(\frac{\beta}{t_1} - \alpha t_1\right),$$

t und t_1 sind gegeben, x und x_1 sind unbestimmt.

Im Schnittpunkte dieser Geraden haben wir (§ 26)

$$\left.\begin{aligned} t(1 - x) &= t_1(1 - x_1) \\ \frac{x}{t} &= \frac{x_1}{t_1} \end{aligned}\right\}$$

und durch Elimination von x_1

$$t(1 - x) = t_1\left(1 - \frac{t_1}{t}x\right),$$

oder $$x = \frac{t}{t + t_1}.$$

Demnach ist der Vector des Schnittpunktes

$$\varrho = \frac{\alpha t t_1 + \beta}{t_1 + t},$$

und für die Endlage des Schnittpunktes, wo $L\frac{t}{t_1} = 1$,

$$\varrho = \tfrac{1}{2}\left(\alpha t + \frac{\beta}{t}\right) \text{ wie oben.}$$

Cor. (1). Wenn $tt_1 = 1$

$$\varrho = \frac{\alpha + \beta}{1 + \frac{1}{t}}$$

oder der Schnittpunkt liegt in der Diagonale des Parallelogramms auf α, β.

Cor. (2). Ist $t_1 = mt$, wo m constant sei,

$$\varrho = \frac{mt\alpha + \frac{\beta}{t}}{m+1}.$$

Wir haben aber auch $x = \frac{1}{m+1}$.

Das heisst: *Der geometrische Ort eines Punktes, der eine Gerade in einem gegebenen Verhältnisse theilt, welche von zwei festen Achsen ein Dreieck von bestimmtem Inhalt abschneidet, ist eine Hyperbel, deren Asymptoten diese Achsen sind.*

Cor. (3). Nehmen wir

$$tt_1(t + t_1) = \text{constans},$$

so ist der geometrische Ort eine Parabel, u. s. w.

44.) Der Leser, welcher sich für anharmonische Verhältnisse und Transversalen interessirt, findet in dem ersten Kapitel von Hamilton's Elements of Quaternions eine schöne Anwendung der Vectorenzusammensetzung auf diese Gegenstände. Die Theorie der geometrischen Netze in der Ebene und im Raume ist dort weitläufig entwickelt; es wird dort gezeigt, dass die Methode als specielle Fälle einschliesst das Verfahren von Grassmann's Ausdehnungslehre und Möbius' Barycentrischem Calcul. Einige sehr merkwürdige Untersuchungen, die sich auf Curven und Oberflächen zweiter und dritter Ordnung beziehen, werden dort durchgeführt mit Hülfe der Sätze über Vectorenzusammensetzung.

Uebungsbeispiele zu Kapitel I.

1. Die Geraden, welche, ohne sich zu schneiden, die Endpunkte zweier gleichlangen und parallelen Geraden verbinden, sind selbst einander gleich und parallel (Euclid I. XXIII).

2. Die Vectoren der Eckpunkte eines Viereckes, eben oder windschief, seien gegeben. Man suche den Vector des Mittelpunktes der Geraden, welche die Mittelpunkte der beiden Diagonalen ver-

bindet und zeige, dass dieser Punkt der *mittlere**) Punkt des Viereckes ist.

Theilt man zwei gegenüberliegende Seiten nach demselben Verhältniss und bildet zwei neue Vierecke, indem man diese Punkte verbindet, so liegen die mittleren Punkte jener drei Vierecke auf einer Geraden.

Man zeige, dass der mittlere Punkt auch gefunden werden kann, indem man die Gerade halbirt, welche die Mittelpunkte der beiden Geraden verbindet, welche die Mittelpunkte zweier gegenüberliegenden Seiten verbindet.

3. Man zeige, dass die Gleichung (§ 30), der die Coefficienten von drei Vectoren, deren Endpunkte in einer Geraden liegen, genügen, sich nicht ändert, wenn man den Anfangspunkt verlegt.

4. Sind zwei Dreiecke, ABC, abc so im Raume gelegen, dass Aa, Bb, Cc sich in einem Punkte schneiden, so liegen die Schnittpunkte von AB, ab, BC, bc und CA, ca auf einer Geraden.

5. Man beweise den umgekehrten Satz von 4, d. h. zieht man von drei beliebigen Punkten der Schnittlinie zweier Ebenen aus eine Gerade in jeder dieser Ebene, so sind die so entstehenden Dreiecke Schnitte derselben Pyramide.

6. Bildet man fünf Vierecke, indem man der Reihe nach je eine Seite eines Fünfecks weglässt, verbindet die Mittelpunkte je zweier Diagonalen der so entstandenen Vierecke durch Gerade, so schneiden sich diese Verbindungslinien in einem Punkte. (H. Fox, Talbot.)

7. Man nehme wie in § 7 an, dass der Operator

$$\cos\vartheta + \sqrt{-1}\,\sin\vartheta$$

einen jeden Radius eines gegebenen Kreises um den Winkel ϑ in der positiven Rotationsrichtung dreht, ohne dessen Länge zu ändern, und leite hieraus ab die gewöhnlichen Formeln für $\cos(A+B)$, $\cos(A-B)$, $\sin(A+B)$, $\sin(A-B)$, ausgedrückt durch Sinus und Cosinus von A und B.

8. Legt man zwei Tangenten an eine Hyperbel, verbindet ihren Schnittpunkt mit dem Mittelpunkte, so theilt diese Gerade diejenigen Geraden in zwei gleiche Theile, welche die Schnittpunkte der Tangenten und Asymptoten verbinden; und die Tangente in dem Punkte, wo sie die Curve trifft, theilt die Abschnitte auf den Asymptoten in zwei gleiche Theile.

---

*) Mittleren Punkt eines Polygons nennt man denjenigen Punkt, dessen Vector gleich ist dem Mittel aus der Summe der Vectoren der Eckpunkte.

9. Zwei beliebige Tangenten, welche durch die Asymptoten begrenzt werden, zerlegen sich gegenseitig in Theile, die einander proportional sind.

10. Ist die Sehne einer Hyperbel die eine Diagonale eines Parallelogramms, dessen Seiten den Asymptoten parallel sind, so geht die andere Diagonale durch den Mittelpunkt.

11. Man zeige, dass

$$\varrho = x^2\alpha + y^2\beta + (x+y)^2\gamma$$

die Gleichung eines Kegels zweiten Grades ist, und dass die Schnittlinie desselben mit der Ebene

$$\varrho = \frac{p\alpha + q\beta + r\gamma}{p+q+r}$$

eine Ellipse ist, welche die Seiten des Dreiecks, dessen Ecken die Vectoren α, β, γ haben, im Mittelpunkte berührt. (Hamilton, Elements p. 96.)

12. Die Geraden, welche die gegenüberliegenden Seiten eines windschiefen Vierecks in proportionale Theile zerlegen, sind die Erzeugende eines hyperbolischen Paraboloids. (Ibid. p. 97.)

13. Man zeige, dass

$$\varrho = x^3\alpha + y^3\beta + z^3\gamma,$$

wenn

$$x + y + z = 0,$$

einen Kegel dritter Ordnung bedeutet, und dass die Schnittcurve desselben mit der Ebene

$$\varrho = \frac{p\alpha + q\beta + r\gamma}{p+q+r}$$

eine Curve dritten Grades ist, und dass die Geraden

$$\varrho = \frac{p\alpha + q\beta}{p+q} \text{ u. s. w.}$$

die Asymptoten sind und drei (reelle) Tangenten in den Inflexionspunkten. Ferner, dass der mittlere Punkt des Dreiecks, das durch diese drei Geraden gebildet wird, ein conjugirter Punkt der Curve ist, dass somit der Vector $\alpha + \beta + \gamma$ ein conjugirter Strahl des Kegels ist. (Ibid. p. 96.)

Kapitel II.

Producte und Quotienten von Vectoren.

45.) Wir kommen nun zur Betrachtung von Punkten, in denen die Quaternionen-Rechnung gänzlich von jeder früheren mathematischen Methode abweicht.

Hier werden wir eine Vorstellung erhalten von dem, was eine Quaternion eigentlich ist und woher der Name stammt. Der fundamentale Unterschied liegt in der neuen Bedeutung, welche die Symbole der Multiplication und der Division erhalten. Um den Leser auf die einfachste Art in die Methode einzuführen, beginnen wir mit der Betrachtung des Quotienten oder des Verhältnisses zweier Vectoren.

46.) Sind die gegebenen Vectoren einander parallel, so sahen wir schon früher (§ 22), dass ein jeder derselben ausgedrückt werden kann als numerisches Vielfache des andern; der Multiplicator ist einfach gleich dem Verhältnisse ihrer Länge und ist positiv, wenn die Vectoren gleichgerichtet sind, negativ, wenn dieselben in entgegengesetzter Richtung verlaufen.

47.) Sind die Vectoren nicht parallel, so ziehe man durch einen beliebigen Punkt O zwei Gerade $\overline{OB}$, $\overline{OA}$, die denselben gleich und parallel sind; die Aufgabe ist also zurückgeführt auf die andere, das Verhältniss zweier Vectoren zu bestimmen, die durch denselben Punkt gehen. Wir wollen zunächst untersuchen, *von wieviel verschiedenen Zahlen dies Verhältniss abhängig ist.*

Wir können annehmen, dass $\overline{OA}$ in $\overline{OB}$ übergeführt wird auf folgende Weise.

Erstens. Man vergrössere oder vermindere die Länge von $\overline{OA}$, bis sie derjenigen von $\overline{OB}$ gleichkömmt.

Hierzu ist nur eine einzige Zahl erforderlich, nämlich das Verhältniss der Längen der beiden Vectoren. Wie Hamilton bemerkt, ist dies eine positive oder besser noch eine *zeichenlose* Zahl.

Zweitens. Man drehe $\overline{OA}$ um O bis seine Richtung mit derjenigen von $\overline{OB}$ zusammenfällt. Vergegenwärtigt man sich die Wir-

kung der ersten Operation, so sieht man, dass die beiden Vectoren sich jetzt decken, also identisch geworden sind.

Um diese letztere Operation zu bestimmen, sind drei weitere numerische Grössen erforderlich, nämlich zwei Winkel, um die Ebene festzulegen, in der die Drehung stattfinden soll (entsprechend dem Knoten und der Neigung der Bahn eines Planeten), und ein Winkel, der die Grösse jener Drehung gibt.

Man sieht also, dass das Verhältniss zweier Vectoren, das heisst der Multiplicator, der einen Vector in den andern überführt, im allgemeinen von vier verschiedenen numerischen Grössen abhängt; daher der Name **Quaternion.**

Der specielle Fall zweier Vectoren, die aufeinander senkrecht stehen, wo der Quotient ein Vector senkrecht auf ihrer Ebene ist, wird weiter unten ausführlich besprochen werden. § 64, 65, 72 u. s. w.

48.) Es ist ohne weiteres klar, dass die eben beschriebenen Operationen zu demselben Resultate führen, wenn man sie in entgegengesetzter Reihenfolge ausführt. Hieraus folgt, dass, wenn man eine Quaternion als einen Factor oder ein Instrument betrachtet, welches einen gegebenen Vector in einen andern überführt, man dieselbe in zwei Factoren zerlegen kann; dabei ist es unwesentlich, in welcher Ordnung dieselben aufeinander folgen.

Der *ausdehnende* Factor, oder derjenige, welcher die in § 47 zuerst beschriebene Operation hervorbringt, wird *Tensor* genannt und bezeichnet durch den Buchstaben T, welchen man vor die betrachtete Quaternion setzt.

Der *drehende* Factor, welcher der zweiten Operation in § 47 entspricht, heisst *Versor* und wird bezeichnet durch den Buchstaben U, welchen man vor die Quaternion setzt.

49.) Wenn $\overline{AO} = \alpha$, $\overline{OB} = \beta$, und q die Quaternion ist, welche α in β überführt, so hat man

$$\beta = q\alpha,$$

welches man schreiben kann in der Form

$$\frac{\beta}{\alpha} = q \quad \text{oder} \quad \beta\alpha^{-1} = q,$$

wenn wir *definiren*

$$\frac{\beta}{\alpha} \cdot \alpha = \beta\alpha^{-1} . \alpha = \beta.$$

Man beachte, dass wir q vor α schreiben, dass heisst α wird durch q multiplicirt und nicht q durch α.

Diese Bemerkung ist von der grössten Wichtigkeit bei Quater-

nionen, da, wie wir bald sehen werden, das commutative Gesetz nicht allgemein gültig ist in Bezug auf die Factoren eines Productes.

Nach § 47 und 48 haben wir:

$$q = Tq\,Uq = Uq\,Tq,$$

wo wie oben Tq nur von dem Verhältniss der Längen von α und β abhängt, Uq nur von ihren Richtungen.

Sind α_1 und β_1 Einheitsvectoren, die α und β parallel sind, so ist

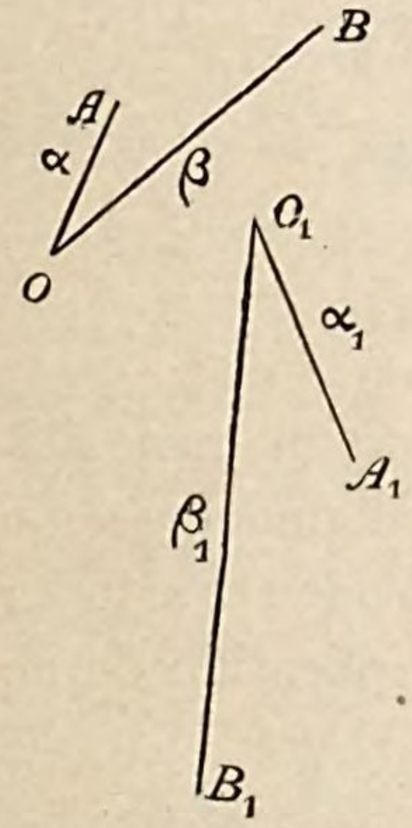
$$T\frac{\beta_1}{\alpha_1} = 1, \quad U\frac{\beta_1}{\alpha_1} = U\frac{\beta}{\alpha}.$$

Wir werden bald zeigen, dass, wenn α auf β senkrecht steht, der Versor des Quotienten ein Quadrant-Versor, d. h. ein Einheits-Vector ist.

50.) Wir müssen sorgfältig anmerken, dass die Quaternion, welche der Quotient ist von β durch α, von den absoluten Längen oder Richtungen dieser Vectoren unabhängig ist. Ihr Werth bleibt unverändert, wenn wir die Vectoren ersetzen durch ein anderes Paar Vectoren, welche

1. ihre Längen in demselben Verhältniss haben;
2. in derselben oder in einer parallelen Ebene liegen, und
3. denselben Winkel mit einander einschliessen.

So ist in der nebenstehenden Figur:



$$\frac{\overline{O_1B_1}}{\overline{O_1A_1}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}$$

wenn und nur wenn

1. $$\frac{O_1B_1}{O_1A_1} = \frac{OB}{OA},$$
2. Ebene AOB parallel der Ebene $A_1O_1B_1$,
3. $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$ ist.

[Gleichheit der Winkel soll auch Gleichheit in der Richtung einschliessen. So ist die Drehung um eine nach oben gerichtete Achse negativ (oder rechts herum) von OA nach OB und ebenso von O_1A_1 nach O_1B_1.]

51.) Die Reciproke einer Quaternion wird definirt durch die Gleichung

$$q\frac{1}{q} = qq^{-1} = 1.$$

Hieraus, wenn

$$\frac{\beta}{\alpha} = q \quad \text{oder} \quad \beta = q\alpha,$$

folgt

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{q} = q^{-1},$$

denn dies gibt $$\frac{\alpha}{\beta}\beta = q^{-1} \,.\, q\alpha,$$

und jede Seite der Gleichung ist offenbar gleich α.

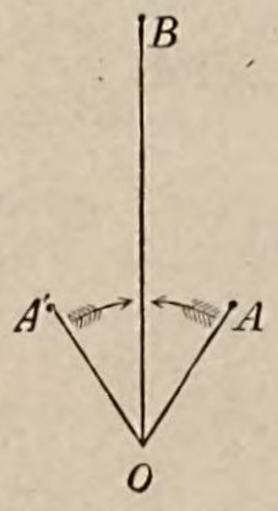
Wir können auch so sagen:

q führt $\overline{OA}$ in $\overline{OB}$ über, q^{-1} muss deshalb $\overline{OB}$ in $\overline{OA}$ verwandeln und wird deshalb ausgedrückt durch $\frac{\alpha}{\beta}$ (§ 49).

Der Tensor der reciproken Quaternion ist deshalb die Reciproke des Tensors der Quaternion; und der Versor unterscheidet sich nur dadurch, dass der Winkel im *entgegengesetzten Sinne* zu nehmen ist. Man darf nicht vergessen, dass der Versor nur die Ebene und den Betrag der Drehung bestimmt, und nichts mit der Ausdehnung zu thun hat.

52.) Die der Quaternion q *conjugirte* Quaternion, die man mit Kq bezeichnet, hat denselben Tensor, dieselbe Ebene und denselben Winkel, nur wird jener Winkel in entgegengesetzter Richtung genommen.

Liegen demnach OA, OB, OA' in einer Ebene



und ist

$$OA' = OA, \qquad \angle A'OB = \angle AOB,$$

so haben wir

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = q \quad \text{und} \quad \frac{\overline{OB}}{\overline{OA'}} = Kq.$$

Aus dem vorigen § sehen wir, dass

$$Kq = (Tq)^2 q^{-1},$$

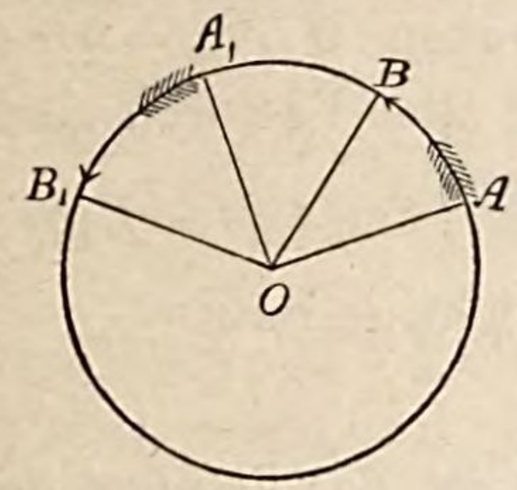
folglich $$qKq = Kq \,.\, q = (Tq)^2.$$

Man sieht leicht ein, dass dem so sein muss, wenn man sich erinnert, dass die Tensoren von q und Kq gleich sind und dass die Versoren sich gegenseitig *aufheben*. Wirken die beiden Factoren gleichzeitig, so ist das Resultat eine zweimalige Multiplication durch den gemeinsamen Tensor.

53.] Sind α und β von gleicher Länge, so folgt leicht aus § 50, dass ihr Quaternionenquotient zum Versor wird, da der Tensor gleich der Einheit ist. Dieser Versor kann ausgedrückt werden durch irgend einen der unendlich vielen Bögen von gegebener Länge, die auf dem Umfange eines Kreises vom Radius Eins liegen, dessen Ebene den beiden Vectoren parallel ist.

Es ist dies von grosser Wichtigkeit in der Beweisführung, die folgt. Man kann also den Versor $\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}$ ausdrücken der Grösse, Ebene

und Richtung nach (§ 50) durch den Bogen AB, den wir in dieser erweiterten Bedeutung schreiben wollen $\widehat{AB}$.

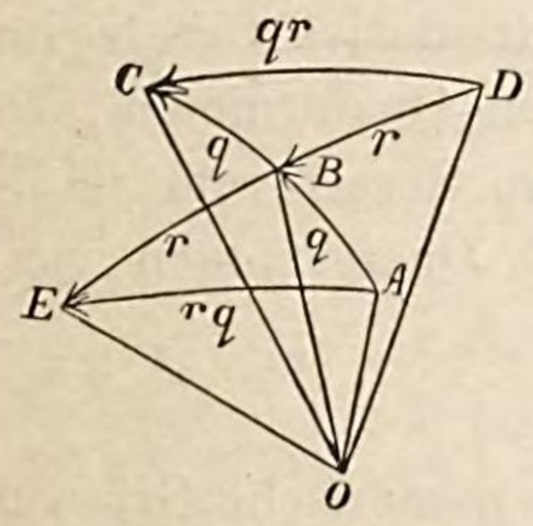


Dem entsprechend wird der Versor $\frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}}$ dargestellt durch $\widehat{A_1B_1}$, welches $\widehat{AB}$ gleich und in derselben Richtung zu nehmen ist, wenn

$$\angle A_1OB_1 = \angle AOB_1,$$

das heisst, wenn die Versoren einander gleich sind in dem Sinne, wie wir die Gleichheit der Quaternionen definirt haben.

54.) Stellen wir nun einen Versor dar als Bogen eines grössten Kreises der Kugel vom Radius Eins, so können wir mit Hilfe dieses Verfahrens leicht nachweisen, dass die Quaternionen-Multiplication im allgemeinen nicht commutativ ist.



Es sei q der Versor $\widehat{AB}$ oder $\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}$. Man nehme $\widehat{BC} = \widehat{AB}$, was, der Bedeutung des Bogens über BC, AB zufolge, erfordert, dass A, B, C auf demselben grössten Kreise liegen; dann kann man q auch darstellen durch $\frac{\overline{OC}}{\overline{OB}}$.

Auf dieselbe Weise kann jeder andere Versor r dargestellt werden durch $\widehat{DB}$ oder $\widehat{BE}$ und durch $\frac{\overline{OB}}{\overline{OD}}$ oder $\frac{\overline{OE}}{\overline{OB}}$.

Die Gerade OB in der Figur ist eine ganz bestimmte, sie ist nämlich die Schnittlinie der Ebene der beiden Versoren; O ist der Mittelpunkt der Kugel vom Radius Eins.

Nun ist $r\overline{OD} = \overline{OB}$ und $q\overline{OB} = \overline{OC}$,

folglich

$$qr\overline{OD} = \overline{OC}$$

oder $qr = \frac{\overline{OC}}{\overline{OD}}$ und kann also dargestellt werden durch den Bogen $\widehat{DC}$ eines grössten Kreises.

Man sieht nun leicht, dass rq dargestellt wird durch den Bogen $\widehat{AE}$.

Denn $$q\overline{OA} = \overline{OB} \quad \text{und} \quad r\overline{OB} = \overline{OE},$$

hieraus $$rq\overline{OA} = \overline{OE} \quad \text{und} \quad rq = \frac{\overline{OE}}{\overline{OA}}.$$

Obgleich nun die Versoren rq und qr durch Bögen von gleicher Länge dargestellt werden, so liegen sie doch im allgemeinen nicht

in derselben Ebene und sind deshalb nicht einander gleich, ausgenommen wenn die Ebenen von q und r zusammenfallen.

Nennen wir $\overline{OA}\ \alpha$, so sieht man, dass wir in obiger Auseinandersetzung angenommen oder festgesetzt haben $q.r\alpha = qr.\alpha$ und $r.q\alpha = rq.\alpha$, wo $q\alpha$, $r\alpha$, $q.r\alpha$ und $rq.\alpha$ alles Vectoren sind.

55.) Augenscheinlich ist $\widehat{CB} = Kq$, $\widehat{BD} = Kr$, und $\widehat{CD} = K(qr)$. Aber $\widehat{CD} = \widehat{BD}.\widehat{CB}$, und hieraus folgt der wichtige Satz

$$K(qr) = KrKq,$$

d. h. *die Conjugirte des Products zweier Versoren ist das Product der Conjugirten derselben in umgekehrter Reihenfolge.*

56.) Die eben bewiesenen Sätze gelten natürlich sowohl für Quaternionen als für Versoren. Denn erstere schliessen nur noch einen numerischen Factor ein, der sich allein auf die Länge, nicht auf die Richtung eines Vectors bezieht (§ 48).

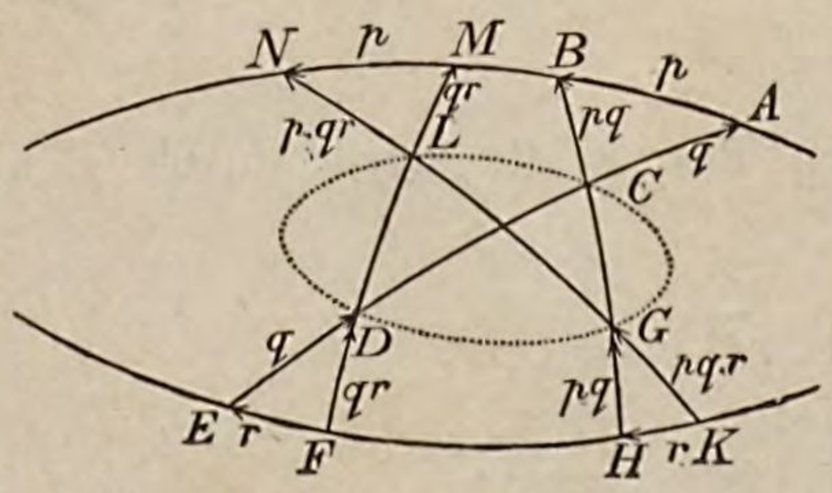
57.) Da wir gesehen haben, dass das commutative Gesetz im allgemeinen nicht gilt bei der Multiplication von Quaternionen, so wollen wir jetzt untersuchen, ob das associative Gesetz seine Gültigkeit behält. Das heisst, wenn p, q, r drei Quaternionen vorstellen, hahen wir dann

$$p.qr = pq.r\,?$$

Dies ist selbstverständlich richtig, wenn p, q, r numerische Grössen sind oder imaginäre Grössen der Algebra. Aber man darf dies nicht ohne weiteres als wahr annehmen bei Symbolen, die im allgemeinen nicht geben

$$pq = qp.$$

58.) Zunächst wollen wir bemerken, dass wir unter p, q, r Versoren verstehen können und diese sich demnach als Bögen grösster Kreise darstellen lassen. Die Tensoren nämlich (§ 48) können auf beiden Seiten herausdividirt werden, da sie mit den Versoren commutativ sind.



Es sei $\widehat{AB} = p$, $\widehat{ED} = \widehat{CA} = q$ und $\widehat{FE} = r$. Man verbinde B, C durch einen grössten Kreis und verlängere denselben bis zum Schnittpunkte mit EF in H; man nehme $\widehat{KH} = \widehat{FE} = r$, und $\widehat{HG} = \widehat{CB} = pq$ (§ 54).

Verbindet man G, K, so ist

$$\widehat{KG} = \widehat{HG}\,.\,\widehat{KH} = pq : r.$$

Weiter verbinde man F, D und verlängere diesen grössten Kreis bis zu seinem Schnittpunkte mit AB in M, nehme $\widehat{LM} = \widehat{FD}$, $\widehat{MN} = \widehat{AB}$ und ziehe NL, dann ist

$$\widehat{LN} = \widehat{MN} \,.\, \widehat{LM} = p \,.\, qr.$$

Um nun zu zeigen, dass

$$p \,.\, qr = pq \,.\, r,$$

hat man nur zu beweisen, dass LN und KG, die auf obige Weise construirt sind, gleiche Bögen desselben grössten Kreises sind, denn man ersieht schon aus der Figur, dass sie in derselben Richtung genommen sind. Dies ist vielleicht am leichtesten zu erreichen mit Hilfe der Grundeigenschaften der Curven, die man sphärische Kegelschnitte nennt.

Da sie nicht jedem Leser bekannt sein dürften, wollen wir eine kleine Abschweifung machen, um diese fundamentalen Eigenschaften zu beweisen; wir folgen hierin der Methode von Chasles; dieser und Magnus nämlich sind die Entdecker derselben. Wir werden bald einen anderen Beweis des associativen Gesetzes anführen, der sich nicht auf diese Eigenschaften stützt, und in Kapitel VII wenden wir Quaternionen an, um einen selbständigen Beweis des Satzes zu geben, den wir jetzt begründen wollen.

59.*) Definition. *Ein sphärischer Kegelschnitt ist die Schnittcurve eines Kegels zweiten Grades mit einer Kugel, deren Mittelpunkt in der Kegelspitze liegt.*

Lemma. Hat ein Kegel eine Reihe von Kreisschnitten, so hat er auch eine zweite, und zwei Kreise, die verschiedenen Reihen angehören, liegen auf einer Kugel. Man beweist dies leicht auf folgende Weise:

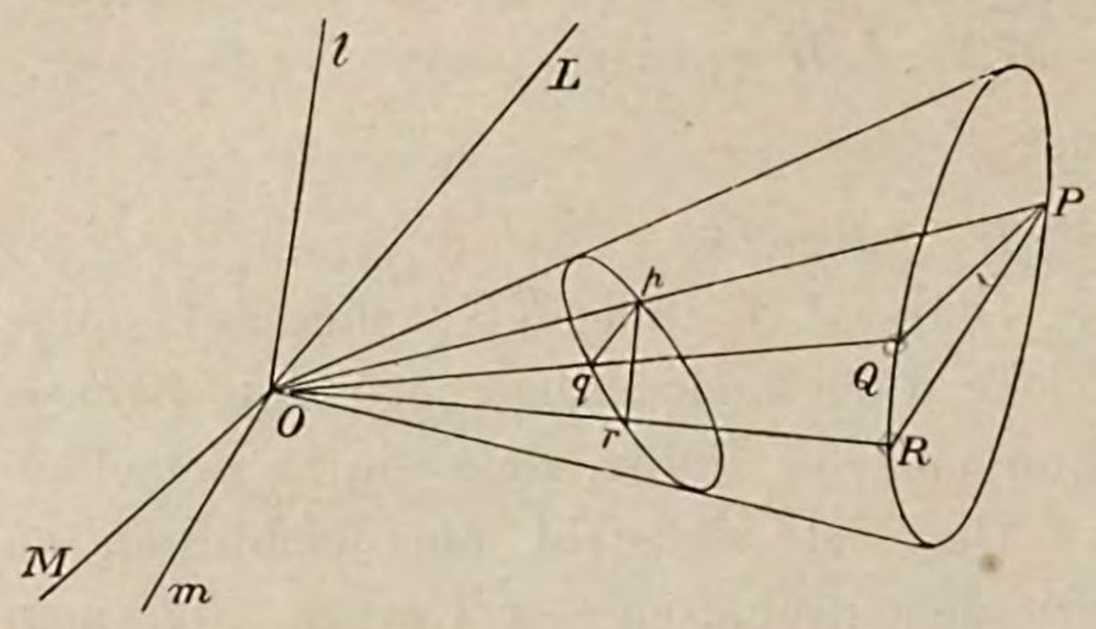
Man construire eine Kugel A, die den Kegel in einem der Kreisschnitte C und in einem andern beliebigen Punkte schneidet.

Der Strahl OpP des Kegels treffe A in p und P, wo P ein Punkt auf C ist. Dann ist $PO \,.\, Op$ constant, und da P in einer Ebene liegt, so muss p auf einer Kugel, a, liegen, die durch den Punkt O geht. Demnach ist der geometrische Ort von p ein Kreis, c, da er die Schnittcurve zweier Kugelflächen ist.

Es sei OqQ ein beliebiger anderer Strahl des Kegels, und q, Q seien Punkte in c und C. Dann ist das Viereck $qQPp$ in einen Kreis eingeschrieben (es ist dies der Kreis, in welchem seine Ebene die Kugel A schneidet) und der Aussenwinkel bei p ist gleich dem Innenwinkel bei Q. Es seien OL, OM die Geraden, in welchen die Ebene POQ die cyklischen Ebenen schneidet (nämlich die Ebenen,

die den beiden Reihen von Kreisschnitten parallel, durch O gelegt sind). OL ist parallel pq, OM, QP und somit

$$\angle LOp = \angle Opq = \angle OQP = \angle MOQ.$$

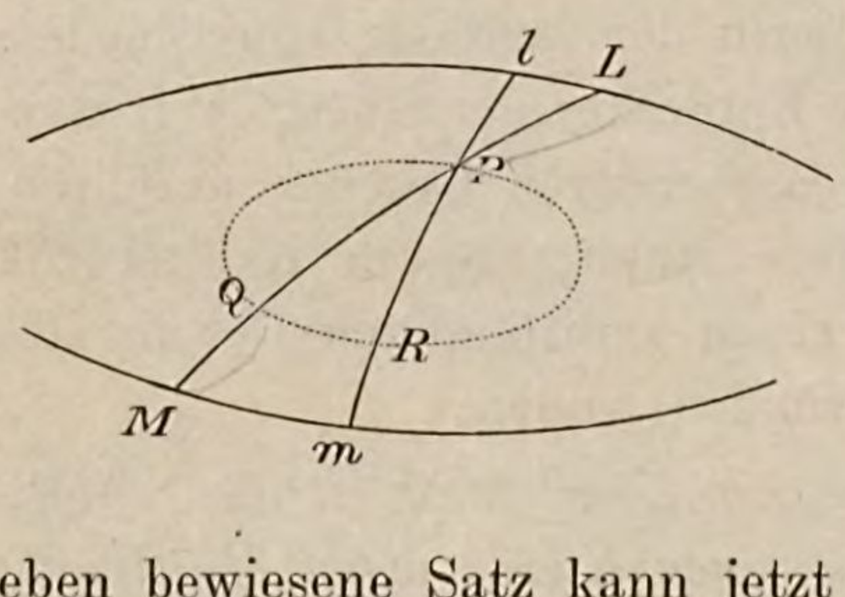


Man ziehe einen dritten Strahl des Kegels, OrR, und die Ebene OPR schneide die cyklischen Ebenen in Ol, Om. Dann ist

$$\angle lOL = \angle qpr$$
$$\angle MOm = \angle QPR$$

und diese Winkel sind unabhängig von der Lage der Punkte p und P, wenn Q und R feste Punkte sind.

Schneiden wir obige Figur durch eine Kugel, deren Mittelpunkt in O liegt, so erhalten wir die grössten Kreise lL, Mm als Darstellung der cyklischen Ebenen; PQR ist der sphärische Kegelschnitt, der den Kegel bestimmt. Der Punkt P bestimmt die Gerade OpP und dem entspricht die Bedeutung der übrigen Punkte. Der eben bewiesene Satz kann jetzt so ausgesprochen werden:



$$\text{Bogen } PL = \text{Bogen } MQ;$$

und wenn Q und R festliegen, so sind Mm und lL constante Bögen, welches auch die Lage von P sei.

60.) Die Anwendung auf § 58 ist nun klar. In der Figur jenes Paragraphen haben wir

$$\overset{\frown}{FE} = \overset{\frown}{KH}, \quad \overset{\frown}{ED} = \overset{\frown}{CA}, \quad \overset{\frown}{HG} = \overset{\frown}{CB}, \quad \overset{\frown}{LM} = \overset{\frown}{FD}.$$

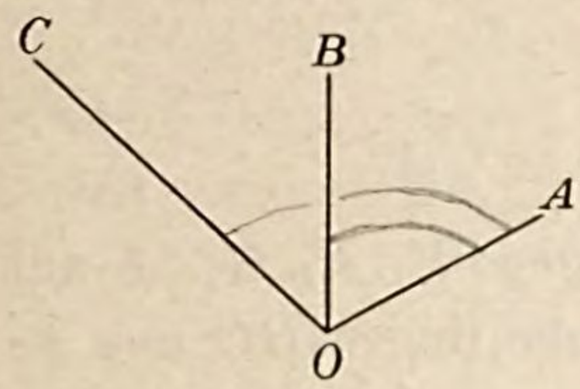
Demnach sind L, C, G, D Punkte eines sphärischen Kegelschnittes, dessen cyklische Ebenen die Ebenen von AB, FE sind. Demnach geht KG durch L und schneidet mit LM auf AB einen Bogen ab, der gleich $\overset{\frown}{AB}$ ist. Das heisst, KG geht durch N, oder KG und LN sind Bogen desselben grössten Kreises, und sie sind einander gleich, da G und L Punkte des sphärischen Kegelschnittes sind.

Das associative Gesetz gilt auch für eine beliebige Anzahl von Quaternionen. Denn offenbar ist

$$qr \,.\, st = qrs \,.\, t = \text{u. s. w.},$$

da wir qr als eine einfache Quaternion betrachten können und obigen Beweis direkt anwenden dürfen.

61.) Dass die Addition von Quaternionen, und in Folge dessen auch die Subtraction, commutativ ist, ist leicht nachzuweisen.



Schneiden sich nämlich die Ebenen zweier Quaternionen q und r in der Geraden OA, so können wir in jener Geraden einen beliebigen Vector $\overline{OA}$ nehmen und zwei andere dazu aufsuchen der Art, dass

$$\overline{OB} = q\overline{OA}$$

und $$\overline{OC} = r\overline{OA}$$

und $$(q+r)\overline{OA} = \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OC} + \overline{OB} = (r+q)\overline{OA},$$

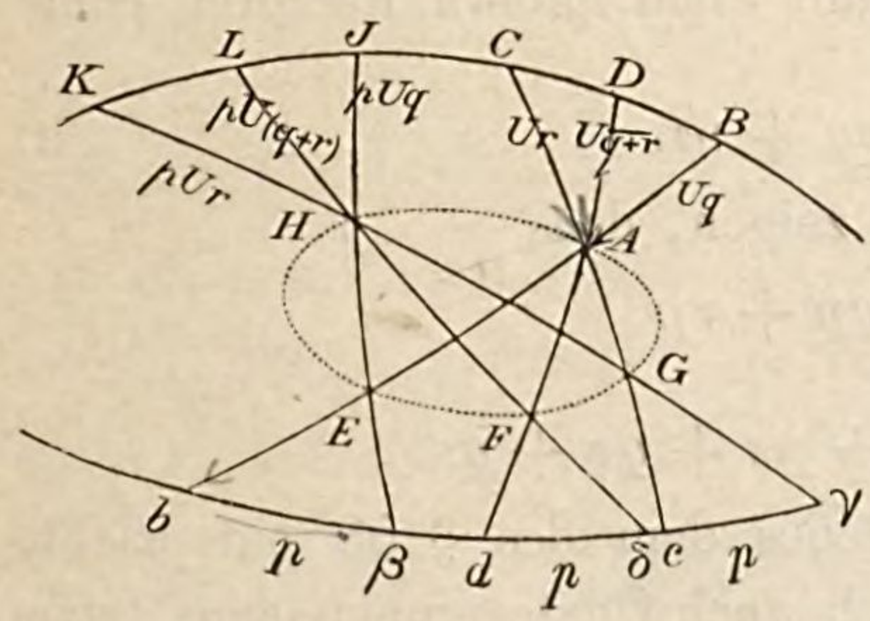
da die Vectoraddition commutativ ist.

Man sieht leicht ein, dass $(q+r)\overline{OA}$, als Diagonale des auf $\overline{OB}$ und $\overline{OC}$ errichteten Parallelogramms, den Winkel zwischen $\overline{OB}$ und $\overline{OC}$ in einem Verhältnisse theilt, welches allein von dem Verhältnisse der Längen dieser Geraden abhängt, das heisst von dem Verhältnisse der Tensoren von q und r.

Diese Bemerkung wird uns von Nutzen sein bei dem Beweise des distributiven*) Gesetzes, zu dem wir jetzt übergehen.

62.) Die Quaternionen-Multiplication und Division sind distributiv. Ein einfacher Beweis dieses Satzes beruht darauf, dass jede Quaternion, wie bald nachgewiesen werden soll, dargestellt werden kann als lineare Function von drei aufeinander senkrecht stehenden Einheits-Vectoren. Ist der Satz auf diese Weise begründet, so kann man das associative Gesetz leicht daraus ableiten.

Wir können aber auch den Beweis herleiten aus den Eigenschaften der sphärischen Kegelschnitte, die wir schon benutzt haben, um die Gültigkeit des associativen Gesetzes abzuleiten. Des Zusammenhanges wegen deuten wir den Beweis nach diesem Verfahren an.



$\widehat{BA}$ und $\widehat{CA}$ sollen die Versoren von q und r vorstellen, und bc den grössten Kreis, dessen Ebene die Ebene von p ist. Operiren wir dann auf den Vector $\overline{OA}$, so wird $U(q+r)$ dargestellt etwa durch den Bogen $\widehat{DA}$, wo B, D, C in einem grössten Kreise liegen. Denn $(q+r)\overline{OA}$ liegt in der Ebene

*) Eine Operation wird distributiv genannt, wenn deren Wirkung auf ein Ganzes gleich ist der Summe der Wirkungen auf dessen einzelne Theile.

von $q\overline{OA}$ und $r\overline{OA}$, und die relativen Grössen der Bögen BD und DC hängen allein von den Tensoren von q und r ab.

Man verlängere BA, DA, CA bis zum Schnittpunkt in bc in b, d, c und nehme

$$\widehat{Eb} = \widehat{BA}, \quad \widehat{Fd} = \widehat{DA}, \quad \widehat{Gc} = \widehat{CA}.$$

Macht man noch $\widehat{b\beta} = \widehat{d\delta} = \widehat{c\gamma} = p$, so liegen E, F, G, A auf einem sphärischen Kegelschnitte, dessen cyklische Bogen BC und bc sind. Da nun $\widehat{b\beta} = \widehat{d\delta} = \widehat{c\gamma}$, so schneiden sich die Verlängerungen von $\widehat{\beta E}$, $\widehat{\delta F}$, $\widehat{\gamma G}$ in einem Punkte H, der ebenfalls auf dem sphärischen Kegelschnitte liegt. (§ 59*.) Diese Bogen schneiden BC in J, L, K. Wir haben dann

$$\widehat{JH} = \widehat{E\beta} = pUq$$
$$\widehat{LH} = \widehat{F\delta} = pU(q+r)$$
$$\widehat{KH} = \widehat{G\gamma} = pUr$$

und

$$\widehat{LJ} = \widehat{DB}$$
$$\widehat{KL} = \widehat{CD}.$$

Betrachten wir die Theile der Figur, von denen der eine durch HKJ, der andere durch ACB begrenzt wird, so sehen wir (wenn wir sie in Bezug auf die Wirkung betrachten, die sie als Factoren, die $\overline{OH}$ und $\overline{OA}$ multipliciren, ausüben), dass

$pU(q+r)$ im selben Verhältnisse steht
zu pUq und pUr,
wie $U(q+r)$ zu Uq und Ur.

Nun ist aber

$$T(q+r)\,U(q+r) = q+r = Tq\,Uq + Tr\,Ur,$$

folglich $T(q+r).pU(q+r) = Tq.pUq + Tr.pUr,$

oder, da die Tensoren Zahlen und mit allen andern Factoren commutativ sind,

$$p(q+r) = pq + pr.$$

Auf ähnliche Weise kann man zeigen, dass

$$(q+r)p = qp + rp$$

und dann folgt

$$(p+q)(r+s) = pr + ps + qr + qs.$$

63.) Durch ein Verfahren, welches dem des § 53 entspricht, sehen wir, dass Versoren und folglich auch Quaternionen dem Satze über Exponenten folgen

$$q^m q^n = q^{m+n}$$

so lange wenigstens als m und n positive ganze Zahlen sind.

Die Ausdehnung dieser Eigenschaft auf negative und gebrochene Exponenten muss hinausgeschoben werden, bis wir die Bedeutung derselben für Quaternionen festgestellt haben.

64.) Wir gehen jetzt zu dem speciellen Falle über, wo der Versor ein Quadrant ist; man kann aus den Eigenschaften desselben leicht sämmtliche in diesem Kapitel erhaltene Resultate herleiten. In der That konnte Hamilton, nach Entdeckung dieser Eigenschaften im Jahre 1843, die Grundprincipien der Quaternionen-Rechnung rein auf die Anschauung begründen.

Wir wollen uns für jetzt begnügen, eine Annahme zu machen die, wie die Resultate zeigen werden, gerechtfertigt ist; aber am Ende des Kapitels werden wir zeigen, dass keine andere Annahme möglich ist, und zu diesem Zwecke werden wir einer sehr merkwürdigen, halb metaphysichen Betrachtung Hamilton's folgen.

65.) Wir wollen ein System von drei aufeinander senkrecht stehenden Einheits-Vectoren annehmen, die von einem Punkte ausgehen; dieselben mögen bezeichnet werden mit I, J, K. Wir wollen weiter annehmen, dass eine positive Drehung (d. h. nach links) von einem rechten Winkel um I als Achse, J zur Deckung bringt mit K. Dann wird eine positive Drehung durch einen rechten Winkel um J als Achse, K zusammenfallen machen mit I, und eine solche Drehung um K wird I mit J zur Deckung bringen.

Um einen bestimmten Fall ins Auge zu fassen, wollen wir annehmen, I sei nach Osten, J nach Norden und K nach oben gerichtet. Dann bringt eine positive (links) Rotation um die nach Osten gerichtete Linie (I) die nach Norden gerichtete Gerade (J) in eine vertical nach oben gerichtete Stellung (K).

66.) Nun ist der „Operator", welcher J in K überführt, ein Quadrant-Versor (§ 53), und da dessen Achse der Vector I ist, so wollen wir denselben mit i bezeichnen.

Es ist also $\frac{K}{J} = i$ oder $K = iJ$ . . . . . (1)

dem entsprechend $\frac{I}{K} = j$ oder $I = jK$ . . . . . (2)

und $\frac{J}{I} = k$ oder $J = kI$ . . . . . (3)

[Um die Symmetrie dieses Systems zu zeigen, machen wir darauf aufmerksam, dass, wenn man die drei Vectoren I, J, K um eine, gleichviel gegen sie alle geneigte Gerade dreht, bis I die Stelle von J einnimmt, dann auch J an die Stelle von K getreten ist und K an diejenige von I. Obige Gleichungen gelten auch noch in diesem Falle, nur ist (1) mit (2), (2) mit (3) und (3) mit (1) zu vertauschen.]

67.) Nach § 50 hat man

$$\frac{-J}{K} = \frac{K}{J},$$

das heisst, ein nach Süden gerichteter Einheits-Vector steht in demselben Verhältniss zu einem nach oben gerichteten Einheits-Vector, wie dieser zu einem nach Norden gerichteten. Wir haben also

$$\frac{-J}{K} = i \quad \text{oder} \quad -J = iK \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

dem entsprechend $\frac{-K}{I} = j$ oder $-K = jI$ . . . . . (5)

und $\frac{-I}{J} = k$ oder $-I = kJ$ . . . . . (6)

68.) Aus (4) und (1) folgt

$$-J = iK = i(iJ) = i^2 J,$$

es ist also $i^2 = -1$ . . . . . (7)

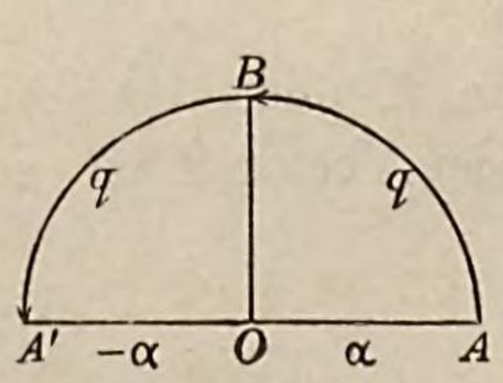
auf dieselbe Weise folgt aus (5) und (2)

$j^2 = -1$ . . . . . (8)

aus (6) und (3) $k^2 = -1$ . . . . . (9)

Da die Richtungen von I, J, K vollkommen willkürlich sind, so sehen wir, dass *das Quadrat eines Quadrant-Versors gleich ist der negativen Einheit.*

Obgleich der nun folgende Beweis im Grunde genommen genau derselbe ist wie der vorhergehende, so mag er dennoch dem Leser von Nutzen sein, indem er sowohl die Natur als auch die Einfachheit des Schrittes, den wir gemacht haben, klar darlegt.



ABA' sei ein Halbkreis, O dessen Mittelpunkt, und OB stehe senkrecht auf AOA'.

Dann ist $\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = q$ ein Quadrantversor,

und ist offenbar gleich $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OB}}$; § 50, 53.

Hieraus $q^2 = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB}} \cdot \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = -1.$

Nachdem wir gefunden haben, dass die Quadrate von i, j, k ein jedes gleich der negativen Einheit ist, bleibt uns noch der Werth ihrer Producte zwei zu zwei zu bestimmen. Denn, wie das Resultat zeigen wird, kann jede andere Combination von i, j, k (als Factoren eines Productes) aus den Werthen dieser Quadrate und Producte hergeleitet werden.

Nun ist klar, dass

$$\frac{K}{-I} = \frac{I}{K} = j;$$

das heisst, der Versor, welcher einen nach Westen gerichteten Einheitsvector nach oben richtet, wird den nach oben gerichteten Vector nach Osten richten,

oder $$K = j(-I) = -jI^*) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Operiren wir nun mit demselben Versor i auf die beiden gleichen Vectoren in (10), so erhalten wir

$$iK = i(-jI) = -ijI.$$

Aus (4) und (3) $$iK = \quad -J \quad = -kI.$$

Vergleichen wir diese beiden Gleichungen, so folgt:

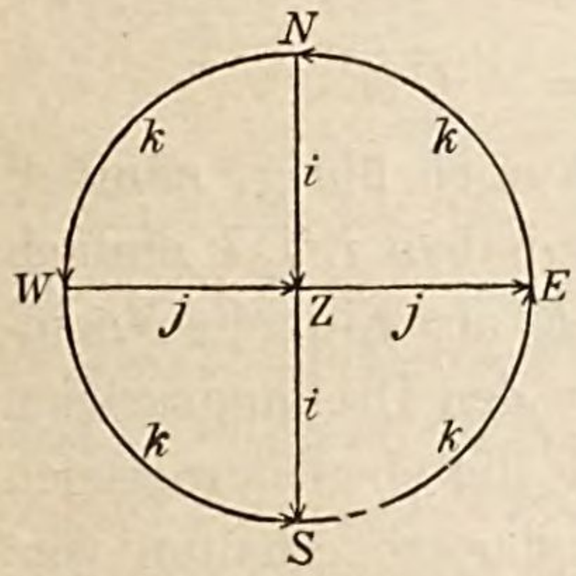
$$-ijI = -kI,$$

oder aus § 54 unten $ij = k$

und der Symmetrie wegen muss $jk = i$

$ki = j$ $\quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$

Die Bedeutung dieser wichtigen Gleichungen ist eine sehr einfache, und klar ersichtlich aus der Construction des § 54 zur Multiplication von Versoren. In der nebenstehenden Figur bedeuten i, j, k Quadrant-Versoren, deren Ebenen aufeinander senkrecht stehen; die Figur stellt demnach eine in rechtwinklige Dreiecke getheilte Halbkugel dar.



Wir wollen zeigen, dass $ij = k$. O sei der Mittelpunkt der Kugel, N, E, S, W bedeuten Norden, Osten, Süden, Westen, und Z sei der Zenith (wie in § 65);

dann ist $$j\overline{OW} = \overline{OZ}$$

und $$ij\overline{OW} = iOZ = \overline{OS} = k\overline{OW}.$$

70.) Derselben Figur zufolge ist aber

$$i\overline{ON} = \overline{OZ},$$

also $$ji\overline{ON} = j\overline{OZ} = \overline{OE} = -\overline{OW} = -k\overline{ON}.$$

71.) Hieraus folgt nun

und dem entsprechend $ji = -k$

$kj = -i$

$ik = -j$ $\quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$

---

*) Das Minuszeichen, als numerischer Factor, kann offenbar vor j geschrieben werden. Wir können uns übrigens leicht überzeugen, dass es auf dasselbe hinauskömmt, wenn wir das negative eines Vectors (d. h. den umgelegten Vector) um einen rechten Winkel (oder einen beliebigen Winkel) drehen, oder wenn wir den Vector um jenen Winkel drehen und dann umlegen.

Vergleicht man dies mit (1), so erhält man

$$\left.\begin{aligned} ij &= -ji = k \\ jk &= -kj = i \\ ki &= -ik = j \end{aligned}\right\} \text{ [(11) (12)]}$$

Diese Gleichungen, im Verein mit

$$i^2 = k^2 = j^2 = -1 \text{ [(7), (8), (9)]}$$

enthalten eigentlich die ganze Quaternionen-Rechnung.

Man sieht leicht, dass die erste Gruppe ersetzt werden kann durch die eine Gleichung

$$ijk = -1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

da man aus dieser, mit Hülfe der Werthe der Quadrate von i, j, k, alle übrigen Ausdrücke ableiten kann. Wir können die Gleichung als auf diese Weise bewiesen ansehen oder dieselbe aus obiger Figur neu ableiten. Also:

$$k\overline{ON} = \overline{OW}$$
$$jk\overline{ON} = j\overline{OW} = \overline{OZ}$$
$$ijk\overline{ON} = ij\overline{OW} = i\overline{OZ} = \overline{OS} = -\overline{ON}.$$

72.) Ein sehr wichtiger Schritt bleibt uns noch übrig, nämlich die Annahme, der wir im § 64 erwähnten. Wir haben i, j, k einfach angesehen als Quadrant-Versoren, und I, J, K als Einheits-Vectoren, die aufeinander senkrecht stehen und mit den Drehungsachsen dieser Versoren zusammenfallen. Schreiben wir die eben bewiesenen Gleichungen, behufs Vergleichung, neben einander, so erhalten wir:

$$\begin{cases} ij = k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11) \\ iJ = K \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} ji = -k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12) \\ jI = -K \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10) \end{cases}$$

Dem entsprechen die übrigen symmetrisch gebildeten Gruppen.

Nun ist die Bedeutung, die wir i, j, k beigelegt haben, unabhängig von der Bedeutung von I, J, K und steht auch nicht im Widerspruch mit dieser. Es ist nun überflüssig, zwei Reihen von Zeichen zu gebrauchen, wenn eine genügt. Man kann demnach I, J, K ersetzen durch i, j, k. In andern Worten:

Ein Einheits-Vector als Factor gebraucht kann angesehen werden als Quadrant-Versor, dessen Ebene auf dem Vector senkrecht steht. Ein jeder Vector kann also angesehen werden als zusammengesetzt aus einem Quadrant-Versor und einem numerischen Factor.

Hierauf beruht hauptsächlich die ausserordentliche Einfachheit der Quaternionen-Rechnung.

73.) Demnach *ist das Product und somit auch der Quotient zweier aufeinander senkrecht stehender Vectoren ein dritter Vector, der auf jenen beiden senkrecht steht.*

Aus jener Festsetzung folgt, dass die Reciproke (§ 51) eines Vectors ein Vector ist, dessen Richtung der des ersten Vectors entgegengesetzt ist, und seine Länge ist die reciproke Länge des Vectors.

Die Conjugirte (§ 52) eines Vectors ist einfach jener Vector in entgegengesetzter Richtung genommen.

Ist α ein Vector, so hat man also nach (§ 52)

$$(T\alpha)^2 = \alpha K\alpha = \alpha(-\alpha) = -\alpha^2.$$

74.) Wir werden jetzt sehen, dass *jeder Versor dargestellt werden kann durch einen Einheits-Vector, der zu einer bestimmten Potenz erhoben wird.*

Ist nämlich α ein beliebiger, auf i senkrecht stehender Vector (wo i irgend ein bestimmter Einheits-Vector sein soll), so ist $i\alpha = \beta$ ein Vector, dessen Länge gleich der Länge von α, der aber auf α und i senkreckt steht:

$$i^2\alpha = -\alpha$$
$$i^3\alpha = -i\alpha = -\beta$$
$$i^4\alpha = -i\beta = -i^2\alpha = \alpha.$$

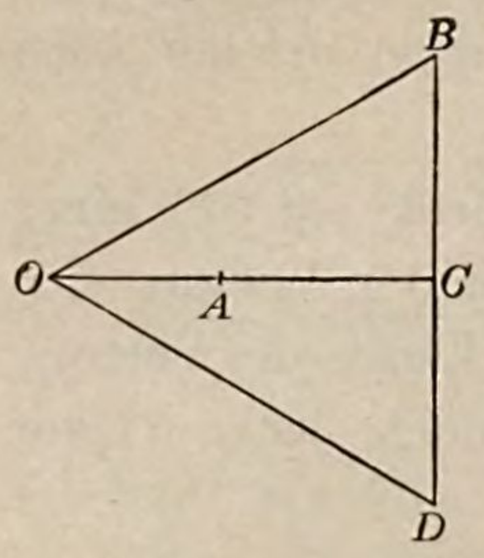
Durch aufeinander folgende Anwendung von i wird also α um i als Achse um eine Reihe von rechten Winkeln gedreht.

Es liegt also nahe, i^m zu definiren als Versor, der *jeden auf i senkrecht stehenden Vector um m Rechte dreht, in positiver Richtung und um i als Achse.* m kann jeden beliebigen reellen Werth haben, ganz oder gebrochen, denn man sieht leicht ein, dass ein negativer Werth von m gedeutet werden kann als einer negativen Drehung entsprechend.

75.) Hieraus folgt weiter, dass jede Quaternion dargestellt werden kann *durch einen, zu einer gewissen Potenz erhobenen Vector.* Denn das Tensor- und Versorelement des Vectors können so gewählt werden, dass sie, zur selben Potenz erhoben, das eine den Tensor, das andere den Versor der gegebenen Quaternion darstellen.

76.) Aus diesen beiden Paragraphen folgt nun unmittelbar, dass das Exponentengesetz gültig ist für Potenzen aus Quaternionen. (§ 63.)

77.) Bis hierher haben wir eine Quaternion angesehen als das *Product* aus einem Tensor und einem Versor. Jetzt wollen wir dieselbe als *Summe* betrachten. Die einfachste Methode, dieselbe so zu zerlegen, mag folgende sein.



$\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}$ sei eine beliebige Quaternion. Man fälle von B aus eine senkrechte auf $\overline{OA}$, das, wenn nöthig, verlängert wird.

Nach § 19 ist dann

$$\overline{OB} = \overline{OC} + \overline{CB},$$

aber nach § 22 $\overline{OC} = x\overline{OA}$,

wo x eine Zahl bedeutet, deren Vorzeichen gleich ist dem Zeichen des Cosinus von $\angle AOB$.

Nach § 73, da $\overline{CB}$ auf $\overline{OA}$ senkrecht steht,

$$\overline{CB} = \gamma\overline{OA},$$

wo γ ein Vector ist, der auf $\overline{CB}$ und $\overline{OA}$, also auf der Ebene der Quaternion, senkrecht steht.

Also $$\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{x\overline{OA} + \gamma\overline{OA}}{\overline{OA}} = x + \gamma.$$

Im allgemeinen kann also eine Quaternion zerlegt werden in eine Summe von zwei Theilen, der eine eine Zahl, der andere ein Vector. Hamilton nennt sie die *Scalar* und den *Vector* und bezeichnet dieselben durch die Buchstaben S und V, die vor das Zeichen der Quaternion gesetzt werden.

78.) Man hat also $q = Sq + Vq$,

und wenn in obigem Beispiel $\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = q$,

dann ist $\overline{OB} = \overline{OC} + \overline{CB} = Sq\,.\,\overline{OA} + Vq\,.\,\overline{OA}$.*)

Diese Gleichung liefert

$$\overline{OC} = Sq\,.\,\overline{OA}$$
$$\overline{CB} = Vq\,.\,\overline{OA}.$$

79.) In der Figur des vorhergehenden Paragraphen verlängern wir BC bis zu D, nehmen $CD = BC$ und verbinden O und D.

Nach § 52 haben wir dann

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{OA}} = Kq = SKq + VKq;$$

$$\overline{OD} = \overline{OC} + \overline{CD} = SKq\,.\,\overline{OA} + VKq\,.\,\overline{OA}.$$

Also $$\overline{OC} = SKq\,.\,OA$$

und $$\overline{CD} = VKq\,.\,OA.$$

---

*) Die eingeschobenen Punkte sollen bedeuten, dass S und V sich nur auf q, nicht auf $q\overline{OA}$ beziehen.

Vergleichen wir dies mit dem vorigen Abschnitt, so ergibt sich

$$SKq = Sq, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

oder *die Scalar der conjugirten Quaternion ist der Scalar der Quaternion gleich.*

Aus der Figur folgt weiter $CD = -CB$; setzen wir dies ein, so folgt:

$$VKq = -Vq \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Der Vector der conjugirten Quaternion ist gleich dem negativen Vector der Quaternion.

Wir machen darauf aufmerksam, dass die Ergebnisse dieses Abschnittes einfach aus der Thatsache folgen, dass die Symbole S, V, K commutativ*) sind.

Es ist $$SKq = KSq = Sq,$$

da die Conjugirte einer Zahl diese Zahl selbst ist; und

$$VKq = KVq = -Vq \ (\S\ 73).$$

Man sieht leicht ein, dass

$$\Sigma Sq = S\Sigma q, \qquad \Sigma Vq = V\Sigma q,$$

und hieraus $$\Sigma Kq = K\Sigma q.$$

80.) Wir sahen, dass jeder Vector dargestellt werden kann durch

$$xi + yj + zk,$$

wo x, y, z Zahlen (oder Scalaren) sind, und i, j, k drei beliebige nicht complanare Vectoren sein können, obgleich man gewöhnlich dazu ein rechtwinkliges System von Einheitsvectoren wählt; bezeichnet man noch mit w eine Scalargrösse, so kann jede Quaternion q auf die Form gebracht werden

$$q = w + xi + yj + zk \ (\S\ 78).$$

Hier haben wir in der einfachsten Form die vier Zahlen, von denen die Quaternion wesentlich abhängt und welche derselben auch den Namen geben.

Hieraus folgt, dass eine Gleichung wie

$$q' = q,$$

---

*) Es ist interessant, die Eigenschaften dieser Quaternionensymbole zu vergleichen mit den sogenannten „electiven“ Symbolen der Logik, wie Boole sie gibt in seinem bewundernswerthen Werke „the laws of thought“. So entdeckt dieselbe grossartige Wissenschaft der mathematischen Analyse durch Verfahren, die sich sehr ähnlich sind, Wahrheiten im Gebiete der Wissenschaft des Raumes, die auf anderm Wege dem Mathematiker unerreichbar sind, und lässt den Philosophen zu Deductionen gelangen, die er ohne dies Hülfsmittel niemals erreicht hätte.

wo $$q' = w' + x'i + y'j + z'k$$
die folgenden vier Gleichungen in sich schliesst:

$$w' = w, \qquad x' = x, \qquad y' = y, \qquad z' = z.$$

81.) Wir wollen jetzt einen andern Beweis des distributiven Gesetzes geben.

Wir haben schon früher festgesetzt oder angenommen (§ 61), dass

$$\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\beta+\gamma}{\alpha}$$

oder $$\beta\alpha^{-1} + \gamma\alpha^{-1} = (\beta+\gamma)\alpha^{-1},$$

und wir sehen hieraus, was man unter Addition zweier Quaternionen versteht.

Schreibt man α statt α^{-1}, so erhält man die Gleichung

$$(\beta+\gamma)\alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha;$$

nehmen wir die Conjugirten auf beiden Seiten, so folgt

$$\alpha'(\beta'+\gamma') = \alpha'\beta' + \alpha'\gamma' \text{ (§ 55).}$$

Verbindet man diese Resultate, indem man zum Beispiel in der letzten Gleichung $\beta+\gamma$ statt α' schreibt, so erhält man

$$(\beta+\gamma)(\beta'+\gamma') = (\beta+\gamma)\beta' + (\beta+\gamma)\gamma' = \beta\beta' + \gamma\beta' + \beta\gamma' + \gamma\gamma'$$

nach der ersten jener Gleichungen.

Demnach ist *das distributive Gesetz gültig für die Multiplication von Vectoren.*

Es bleibt noch nachzuweisen, dass es gilt für den Scalar- und Vectortheil einer Quaternion; daraus wird sich dann leicht der allgemeine Beweis ergeben.

Es sei a eine beliebige Scalar, α ein beliebiger Vector, q eine beliebige Quaternion, dann ist

$$(a+\alpha)q = aq + \alpha q.$$

Denn ist β der Vector, in welchem die Ebene von q durch eine Ebene senkrecht zu α geschnitten wird, so können wir in diesen Ebenen zwei andere Vectoren, γ und δ, finden, so beschaffen, dass

$$\alpha = \frac{\gamma}{\beta}, \qquad q = \frac{\beta}{\delta}.$$

a kann geschrieben werden $\frac{a\beta}{\beta}$; somit ist

$$\begin{aligned}(a+\alpha)q &= \frac{a\beta+\gamma}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\delta} = \frac{a\beta+\gamma}{\delta}\\ &= a\frac{\beta}{\delta} + \frac{\gamma}{\delta} = a\frac{\beta}{\delta} + \frac{\gamma}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\delta}\\ &= aq + \alpha q;\end{aligned}$$

die Conjugirte hiervon kann geschrieben werden

$$q'(a'+\alpha') = q'a' + q'\alpha' \text{ (§ 55).}$$

Und allgemein

$$(a+\alpha)(b+\beta) = ab + a\beta + b\alpha + \alpha\beta,$$

oder, indem a und b jedes in die Summe zweier Scalaren zerlegt wird, α und β jedes in die Summe zweier Vectoren,

$$(a_1+a_2+\alpha_1+\alpha_2)(b_1+b_2+\beta_1+\beta_2)$$
$$= (a_1+a_2)(b_1+b_2) + (a_1+a_2)(\beta_1+\beta_2) + (b_1+b_2)(\alpha_1+\alpha_2)$$
$$+ (\alpha_1+\alpha_2)(\beta_1+\beta_2).$$

Nach dem vorhergehenden sind sämmtliche Factoren auf der rechten Seite distributiv, so dass man dieses Glied leicht auf folgende Form bringen kann

$$(a_1+\alpha_1)(b_1+\beta_1)+(a_1+\alpha_1)(b_2+\beta_2)+(a_2+\alpha_2)(b_1+\beta_1)+(a_2+\alpha_2)(b_2+\beta_2).$$

Setzt man nun $a_1+\alpha_1 = p$, $a_2+\alpha_2 = q$,
$b_1+\beta_1 = r$, $b_2+\beta_2 = s$,

so folgt: $(p+q)(r+s) = pr + ps + qr + qs.$

82.) Der Abwechselung wegen wollen wir für einige Zeit die geometrische Beweismethode verlassen, und einige der nächsten Schritte ableiten aus dem Ausdruck, den wir in § 80 für eine Quaternion gegeben haben, und aus den Eigenschaften eines Systems rechtwinkliger Einheits-Vectoren, wie sie in § 71 gegeben sind.

Zunächst wollen wir die Ergebnisse des § 77 nach dieser Methode herleiten.

Es sei $\alpha = xi + yj + zk,$
$\beta = x'i + y'j + z'k.$

Da nach § 71 jedes Product und jeder Quotient aus i, j, k auf eine dieser Grössen oder auf eine Zahl sich zurückführen lässt, so dürfen wir annehmen, dass

$$q = \frac{\beta}{\alpha} = \omega + \xi i + \eta j + \zeta k,$$

wo ξ, η, ζ Zahlen sind. Es ist dies der Satz des § 80.

84.) Es mag von Interesse sein, die Werthe von ω, ξ, η, ζ auszudrücken durch x, y, z, x', y', z'.

Wir haben $\beta = q\alpha$

oder $x'i + y'j + z'k = (\omega+\xi i+\eta j+\zeta k)(xi+yi+zk)$

$= -(\xi x+\eta y+\zeta z)+(\omega x+\eta z-\zeta y)i+(\omega y+\zeta x-\xi z)j+(\omega z+\xi y-\eta x)k.$

Dies ergibt sich leicht aus den Ausdrücken für die Potenzen und Producte von i, j, k, die im § 71 gegeben sind. Der Leser muss besonders die *Reihenfolge* der Factoren beachten, sonst wird er sicherlich Irrthümer begehen.

Nach § 80 hat man dies in folgende vier Gleichungen aufzulösen:

$$\begin{aligned} 0 &= \qquad\quad \xi x + \eta y + \zeta z \\ x' &= \omega x \qquad + \eta z - \zeta y \\ y' &= \omega y - \xi z \qquad + \zeta x \\ z' &= \omega z + \xi y - \eta x. \end{aligned}$$

Die drei letzten Gleichungen geben

$$xx' + yy' + zz' = \omega(x^2 + y^2 + z^2)$$

und dies bestimmt ω.

Aus denselben drei Gleichungen, mit Hinzunahme der ersten, erhält man

$$\xi x' + \eta y' + \zeta z' = 0;$$

dies in Verbindung mit der ersten liefert

$$\frac{\xi}{yz' - zy'} = \frac{\eta}{zx' - xz'} = \frac{\zeta}{xy' - yx'};$$

der gemeinschaftliche Werth dieser drei Ausdrücke ist, wie man leicht sieht:

$$\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Es hat keine Schwierigkeiten, diese Resultate mit Hülfe der gewöhnlichen Coordinaten-Geometrie zu deuten. Aber in dem folgenden Kapitel werden wir in den Quaternionen selbst ein viel einfacheres Verfahren finden, und wir werden dann auf diese Stelle aufmerksam machen.

85.) Das associative Gesetz der Multiplication kann man jetzt beweisen mit Hilfe des distributiven Gesetzes (§ 81). Wir überlassen es dem Leser, die Rechnung durchzuführen. Man hat einfach folgende Factoren mit einander zu multipliciren:

$$w + xi + yj + zk, \quad w' + x'i + y'j + z'k, \quad w'' + x''i + y''j + z''k,$$

und zwar multiplicire man zuerst den dritten Factor durch den zweiten und dann das Product durch den ersten; dann multiplicire man den zweiten Factor durch den ersten und multiplicire den dritten durch dieses Product. Man muss stets festhalten, dass bei jeder Multiplication der Multiplicator *vor* dem Multiplicand steht.

Auf diese Weise findet man, dass die Scalar und die Coefficienten von i, j, k im ersten Producte gleich sind der Scalar und den entsprechenden Coefficienten im zweiten Producte.

86.) Haben α, β dieselbe Bedeutung wie in § 83, so ist:

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= (xi + yj + zk)(x'i + y'j + z'k) \\ &= -(xx' + yy' + zz') + (yz' - zy')i + (zx' - xz')j + (xy' - yx')k. \end{aligned}$$

Anderseits haben wir:

$$\beta\alpha = -(xx' + yy' + zz') - (yz' - zy')i - (zx' - xz')j - (xy' - yx')k.$$

Die beiden Ausdrücke unterscheiden sich nur das Vorzeichen des Vectortheiles.

Es ist also
$$S\alpha\beta = S\beta\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$V\alpha\beta = -V\beta\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
und
$$\alpha\beta + \beta\alpha = 2S\alpha\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$
$$\alpha\beta - \beta\alpha = 2V\alpha\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$
hieraus nach § 79
$$\alpha\beta = k\beta\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

87.) Ist $\alpha = \beta$, so haben wir nach § 25:
$$x = x', \qquad y = y', \qquad z = z',$$
und obige Formeln werden
$$\alpha\beta = \beta\alpha = \alpha^2 = -(x^2 + y^2 + z^2);$$
wir erhielten schon dies Resultat in § 73, indem wir nachwiesen, dass
$$(T\alpha)^2 = -\alpha^2.$$
Bis zu einem gewissen Grade liegt dies auch schon in § 25.

88.) Es seien nun q und r beliebige Quaternionen, es ist dann
$$\begin{aligned} S.qr &= S.(Sq + Vq)(Sr + Vr) \\ &= S.(SqSr + Sr.Vq + Sq.Vr + VqVr) \\ &= SqSr + S.VqVr, \end{aligned}$$
da die beiden mittleren Glieder Vectoren sind.

Dem entsprechend ist
$$S.rq = SrSq + SVrVq.$$
Da nach (1) § 86
$$SVqVr = SVrVq,$$
so folgt:
$$S.qr = S.rq \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
eine Formel von grosser Wichtigkeit.

Wir können dies leicht auf eine beliebige Zahl von Quaternionen ausdehnen, denn da r beliebig ist, können wir an dessen Stelle setzen rs. Dies giebt
$$\begin{aligned} S.qrs &= S.rsq \\ &= S.sqr \end{aligned}$$
durch eine zweite Anwendung dieses Verfahrens. Wir können also den Satz aussprechen:

Die Scalar des Productes einer beliebigen Anzahl von Quaternionen ist nur abhängig von deren cyklischen Anordnung.

89.) Ein wichtiger Fall ist der von drei Factoren, deren jeder ein Vector ist. Man hat dann:

$$S.\alpha\beta\gamma = S.\beta\gamma\alpha = S.\gamma\alpha\beta,$$

aber
$$\begin{aligned} S.\alpha\beta\gamma &= S.\alpha(S\beta\gamma + V\beta\gamma) \\ &= S.\alpha V\beta\gamma, \text{ da } \alpha S\beta\gamma \text{ ein Vector ist,} \\ &= -S.\alpha V\gamma\beta \text{ nach (2) § 86,} \\ &= -S.\alpha(S\gamma\beta + V\gamma\beta) \\ &= -S.\alpha\gamma\beta. \end{aligned}$$

Die Scalar eines Productes von drei Vectoren wechselt also das Vorzeichen, wenn die cyklische Anordnung verlassen wird.

Andere merkwürdige Sätze, die hieraus folgen, werden wir erst später geben, da wir in diesem Kapitel die fundamentalen Formeln möglichst gedrängt aufstellen wollen.

90.) Aus (4) § 86:

$$2V\beta\gamma = \beta\gamma - \gamma\beta,$$

hieraus
$$2V.\alpha V\beta\gamma = V.\alpha(\beta\gamma - \gamma\beta)$$

(indem man auf beiden Seiten mit α multiplicirt und den Vectortheil der beiden Glieder nimmt),

$$= V(\alpha\beta\gamma + \beta\alpha\gamma - \beta\alpha\gamma - \alpha\gamma\beta)$$

indem man das Nullglied $\beta\alpha\gamma - \beta\alpha\gamma$ einführt.

Wir haben also:

$$\begin{aligned} 2V.\alpha V\beta\gamma &= V.(\alpha\beta+\beta\alpha)\gamma - V(\beta S\alpha\gamma + \beta V\alpha\gamma + S\alpha\gamma.\beta + V\alpha\gamma.\beta) \\ &= V.(2S\alpha\beta)\gamma - 2V.\beta S\alpha\gamma), \end{aligned}$$

wenn wir beachten, dass

$$V.(V\alpha\gamma)\beta = -V.\beta V\alpha\gamma \quad (2) \text{ (§ 86).}$$

Also
$$V.\alpha V\beta\gamma = \gamma S\alpha\beta - \beta S\gamma\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

eine Formel, die beständig wiederkehrt.

Addiren wir auf beiden Seiten $\alpha S\beta\gamma$, so erhalten wir eine andere sehr wichtige Formel:

$$V.\alpha\beta\gamma = \alpha S\beta\gamma - \beta S\gamma\alpha + \gamma S\alpha\beta \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Man sieht aus der Form dieses Ausdrucks, dass man α mit γ vertauschen kann, ohne dass die rechte Seite dadurch verändert wird. Hieraus folgt

$$V.\alpha\beta\gamma = V.\gamma\beta\alpha,$$

eine Formel, die sich auf eine grössere Anzahl von Vectoren ausdehnen lässt.

91.) Wir haben weiter:

$$\begin{aligned} V.V\alpha\beta V\gamma\delta &= -V.V\gamma\delta V\alpha\beta \qquad \text{nach (2) § 86} \\ &= \delta S.\gamma V\alpha\beta - \gamma S.\delta V\alpha\beta = \delta S.\alpha\beta\gamma - \gamma S.\alpha\beta\delta \\ &= -\beta S.\alpha V\gamma\delta + \alpha S.\beta V\gamma\delta = -\beta S.\alpha\gamma\delta + \alpha S.\beta\gamma\delta. \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke sind erhalten worden bei Benutzung von § 90 (1) und § 89, indem man erst $V\alpha\beta$, dann $V\gamma\delta$ als *einfache* Vectoren behandelt hat.

Setzen wir zwei dieser Werthe einander gleich, so erhalten wir:

$$\delta S.\alpha\beta\gamma = \alpha S.\beta\gamma\delta + \beta S.\gamma\alpha\delta + \gamma S.\alpha\beta\delta \quad \ldots\ldots (3)$$

eine sehr nützliche Formel, die einen jeden Vector ausdrückt durch drei gegebene Vectoren.

92.) Dass ein solcher Ausdruck möglich sei, wussten wir schon aus § 23. Der Abwechselung wegen wollen wir einen andern Ausdruck aufsuchen, der dasselbe leistet, und dabei einen Weg einschlagen, der gänzlich von dem eben befolgten abweicht.

Sind α, β, γ drei beliebige Vectoren, so können wir aus diesen drei andere $V\alpha\beta$, $V\beta\gamma$, $V\gamma\alpha$ herleiten; da diese im allgemeinen nicht complanar sein werden, so kann jeder andere Vector, δ, ausgedrückt werden als eine Summe dieser drei, jeder multiplicirt durch eine gewisse Scalar (§ 23).

Diesen Ausdruck für δ wollen wir nun aufsuchen.

Es sei $$\delta = xV\alpha\beta + yV\beta\gamma + zV\gamma\alpha;$$

dann ist $$S\gamma\delta = xS.\gamma\alpha\beta = xS.\alpha\beta\gamma;$$

die Glieder in y und z fallen weg, da

$$S.\gamma V\beta\gamma = S.\gamma\beta\gamma = S\beta\gamma^2 = \gamma^2 S\beta = 0,$$

denn γ^2 ist eine Zahl (§ 73).

Dem entsprechend:

$$S\beta\delta = zS.\beta\gamma\alpha = zS.\alpha\beta\gamma,$$

und $$S\alpha\delta = yS.\alpha\beta\gamma.$$

Also $$\delta S.\alpha\beta\gamma = V\alpha\beta S\gamma\delta + V\beta\gamma S\alpha\delta + V\gamma\alpha S\beta\delta \quad \ldots\ldots (4)$$

93.) Zum Schluss wollen wir unser Versprechen des § 64 erfüllen und zeigen, dass die Annahme, dass das Product zweier parallelen Vectoren eine Zahl ist, und das Product zweier aufeinander senkrecht stehender Vectoren ein dritter Vector, der auf diesen beiden senkrecht steht, dass diese Annahme nicht nur nützlich und bequem ist, sondern dass keine andere gemacht werden kann, wenn in unserm System keine Richtung im Raume etwas vor einer andern voraus haben soll. Wir geben Hamilton's Betrachtung in abgekürzter Form wieder.

Wir nehmen an, dass keine Richtung im Raume etwas vor der andern voraus habe; weiter nehmen wir an, dass das Product zweier Vectoren etwas ist, dem eine bestimmte Grösse zukommt, die sich ändert, wenn die Factoren sich ändern, und deren Vorzeichen sich ändert, wenn einer der Factoren in entgegengesetzter Richtung ge-

nommen wird. Sind die Vectoren parallel, so kann ihr Product, oder ein Theil desselben, nicht ein Vector sein, der gegen dieselben *geneigt* ist, denn nichts bestimmt die Richtung desselben. Es kann kein ihnen paralleler Vector sein; denn wechselt man das Vorzeichen beider Factoren, so bleibt das Product unverändert, während, da das ganze System umgelegt worden ist, auch der Vector des Productes die entgegengesetzte Richtung haben müsste. Es muss also eine Zahl sein. Hingegen kann wieder das Product zweier aufeinander senkrecht stehender Vectoren, ganz oder zum Theil, nicht eine Zahl sein, denn legt man den einen Vector um, so müsste das Vorzeichen der Zahl sich ändern; aber den einen derselben umlegen ist gleichbedeutend mit einer Drehung um zwei rechte Winkel um den andern als Achse, und wegen der Symmetrie des Raumes kann dies die Zahl nicht ändern.

Das Product zweier aufeinander senkrecht stehender Vectoren muss also ein Vector sein, und indem man auf dieselbe Weise weiter schliesst, findet man, dass dieser Vector auf den beiden Factoren senkrecht stehen muss. Man kann dies leicht weiter ausführen, aber das Gesagte genügt, um den Charakter der Betrachtung klar zu legen.

Uebungsbeispiele zu Kapitel II.

1. Aus den Eigenschaften der Polardreiecke folgt, dass jeder Methode, Versoren durch Seiten eines sphärischen Dreiecks darzustellen, eine andere entspricht, in welcher die Versoren ausgedrückt werden durch die Winkel des dazu gehörigen Polardreiecks.

Man zeige nun direkt, dass das Product zweier Versoren, welche durch zwei Winkel eines sphärischen Dreiecks dargestellt sind, ein dritter Versor ist, welcher durch das Supplement des dritten Winkels des Dreiecks dargestellt wird; weiter suche man die Regel auf, welche die Richtung festsetzt, in welcher jene Winkel zu messen sind.

2. Hieraus leite man einen andern Beweis ab, dass im allgemeinen nicht

$$pq = qp.$$

3. Hieraus ergibt sich weiter, dass der Beweis des Associationsgesetzes, § 57, aus folgendem Satze hergeleitet werden kann: Zieht man von irgend einem Punkte der Kugel aus grösste Kreise, welche einen sphärischen Kegelschnitt berühren, und Kreise nach den Brennpunkten, so ist der Winkel zwischen dem einen Tangentenbogen und dem Brennpunktbogen gleich dem Winkel zwischen dem andern Tangentenbogen und dem andern Brennpunktbogen.

4. Man beweise die Formeln:

$$2S.\alpha\beta\gamma = \alpha\beta\gamma - \gamma\beta\alpha$$
$$2V.\alpha\beta\gamma = \alpha\beta\gamma + \gamma\beta\alpha.$$

5. Man zeige, dass für eine beliebige *ungerade* Zahl von Vectoren

$$V.\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon = V.\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha$$
$$V.\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta = V.\eta\zeta\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha \text{ u. s. w.}$$

6. Man zeige:

$$S.V\alpha\beta V\beta\gamma V\gamma\alpha = -(S.\alpha\beta\gamma)^2$$
$$V.V\alpha\beta V\beta\gamma V\gamma\alpha = V\alpha\beta(\gamma^2 S\alpha\beta - S\beta\gamma S\gamma\alpha) + \ldots$$

und $V.(V\alpha\beta\, V.V\beta\gamma V\gamma\alpha) = (\beta S\alpha\gamma - \alpha S\beta\gamma)\, S.\alpha\beta\gamma.$

7. α, β, γ seien irgend welche aufeinander senkrecht stehende Vectoren; man zeige, dass

$$(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3) S.\alpha\beta\gamma = \alpha^4 V\beta\gamma + \beta^4 V\gamma\alpha + \gamma^4 V\alpha\beta.$$

8. α, β, γ seien nicht complanare Vectoren; man suche die Relationen, die zwischen den sechs Scalaren, $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ bestehen, wenn

$$x\alpha + y\beta + z\gamma = \xi V\beta\gamma + \eta V\gamma\alpha + \zeta V\alpha\beta.$$

9. α, β, γ seien beliebig drei, nicht complanare Vectoren; man drücke δ aus als lineare Function von jeder der beiden folgenden Reihen von Vectoren, die aus diesen gebildet sind:

$$V.\gamma\alpha\beta, \quad V.\alpha\beta\gamma, \quad V.\beta\gamma\alpha,$$

und $V.V\alpha\beta V\beta\gamma V\gamma\alpha, \quad V.V\beta\gamma V\gamma\alpha V\alpha\beta, \quad V.V\gamma\alpha V\alpha\beta V\beta\gamma.$

10. Man eliminire ϱ aus den Gleichungen

$$S\alpha\varrho = a, \quad S\beta\varrho = b, \quad S\gamma\varrho = c, \quad S\delta\varrho = d,$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ Vectoren bedeuten, und a, b, c, d Scalaren.

11. In jedem Vierecke, eben oder windschief, ist die Summe der Quadrate der Diagonalen gleich der doppelten Summe der Quadrate der Geraden, welche die Mittelpunkte der gegenüberliegenden Seiten verbinden.

Kapitel III.

Deutung und Umformung von Quaternionenausdrücken.

Zu den nützlichsten Eigenschaften der Quaternionenrechnung gehören die Leichtigkeit, mit welcher ihre Formeln geometrisch gedeutet werden können, und die ausserordentliche Mannigfaltigkeit der Umformungen, welche schon die einfachsten Ausdrücke zulassen.

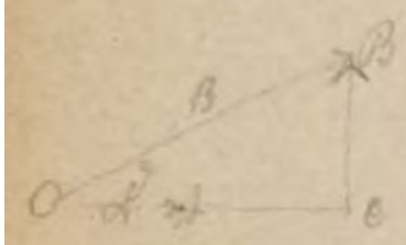
In diesem Kapitel wollen wir nun einige der einfachsten Umformungen vornehmen, daneben aber auch andere von verwickelterer Art, die beständig in geometrischen und physikalischen Untersuchungen auftreten. Jedes folgende Kapitel wird deren neue bringen.

Der Leser wird wahrscheinlich an dieser Stelle am meisten die der neuen Rechnungsart eigenthümlichen Schwierigkeiten empfinden.

Aber eben aus diesem Grunde soll er sich bemühen, derselben Herr zu werden; denn die ausserordentliche Mannigfaltigkeit der Gestalten, welche ein und derselbe Ausdruck annehmen kann, mag zwar den Anfänger in Verlegenheit bringen, ist aber von ausserordentlichem Vortheil für den, der die Methode beherrscht, nicht nur weil sie die Lösung verwickelter Aufgaben erleichtert, sondern auch als unschätzbares Mittel zur Schulung des Verstandes.

95.) Kehren wir zurück zur Figur des § 77. Es ist dort

$$OC = OB \cos AOB,$$
$$CB = OB \sin AOB.$$



Setzen wir: $\overline{OA} = \alpha$, $\overline{OB} = \beta$ und $\angle AOB = \vartheta$,

so folgt: $OB = T\beta$, $OA = T\alpha$,

$$OC = T\beta \cos\vartheta, \quad CB = T\beta \sin\vartheta;$$

und
$$S\frac{\beta}{\alpha} = \frac{OC}{OA} = \frac{T\beta}{T\alpha}\cos\vartheta.$$

Dem entsprechend $TV\frac{\beta}{\alpha} = \frac{CB}{OA} = \frac{T\beta}{T\alpha}\sin\vartheta.$

Ist ε ein Einheitsvector, senkrecht auf α und β, oder

$$\varepsilon = \frac{U\overline{CB}}{U\overline{OA}} = UV\frac{\beta}{\alpha},$$

so folgt:
$$V\frac{\beta}{\alpha} = \frac{T\beta}{T\alpha}\sin\vartheta \,.\, \varepsilon.$$

96.) Auf ähnliche Weise kann man zeigen, dass

$$S\alpha\beta = -T\alpha\, T\beta \cos\vartheta,$$
$$TV\alpha\beta = \quad T\alpha\, T\beta \sin\vartheta,$$
$$V\alpha\beta = \quad T\alpha\, T\beta \sin\vartheta \,.\, \eta,$$

wo $$\eta = UV\alpha\beta = UV\frac{\beta}{\alpha}.$$

Es ist also die Scalar des Productes zweier Vectoren gleich dem Producte ihrer Tensoren, multiplicirt mit dem Cosinus des Supplements des eingeschlossenen Winkels.

Der Tensor des Vectors des Productes zweier Vectoren ist gleich dem Producte ihrer Tensoren, multiplicirt mit dem Sinus des eingeschlossenen Winkels; der Versor dieses Vectors ist ein Einheits-Vector, senkrecht auf beiden, und so gerichtet, dass die Drehung um denselben von dem ersten Vector (dem Multiplicator) zum zweiten nach links gerichtet, oder positiv, ist.

Demnach ist also $TV\alpha\beta$ der doppelte Inhalt des Dreiecks, dessen Seiten α, β sind.

97.) (*a*) In jedem Dreiecke ABC ist

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}.$$

Folglich $$\overline{AC}^2 = S.\,\overline{AC}\,\overline{AC} = S.\,\overline{AC}(\overline{AB} + \overline{BC}).$$

Nach der gewöhnlichen Bezeichnungsweise für ebene Dreiecke lässt sich dieser Ausdruck deuten wie folgt:

$$-b^2 = -bc\cos A - ab\cos C,$$
$$b = a\cos C + c\cos A.$$

(*b*) Weiter haben wir offenbar:

oder $$V\overline{AB}\,\overline{AC} = V\overline{AB}(\overline{AB} + \overline{BC})$$
$$= V\overline{AB}\,\overline{BC}$$

oder $$cb\sin A = ca\sin B,$$

hieraus $$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

Es sind dies Wahrheiten, aber keine Identitäten, wie man vielleicht glauben möchte, wenn man die ausserordentliche Einfachheit des Verfahrens betrachtet.

Aus § 96 folgt, dass, wenn α und β wirkliche (d. h. reelle und nicht verschwindende) Vectoren sind, die Gleichung

$$S\alpha\beta = 0$$

zeigt, dass $\cos\vartheta = 0$, oder dass α auf β senkrecht steht. Und in der That wissen wir, dass das Product zweier, aufeinander senkrecht stehender Vectoren ein Vector ist.

Wenn $$V\alpha\beta = 0,$$
so muss $\sin\vartheta = 0$ sein, oder α ist β *parallel.* Wir wissen, dass das Product zweier parallelen Vectoren eine Zahl ist.

Wir sehen hieraus, dass
$$S\alpha\beta = 0$$
gleichbedeutend ist mit $$\alpha = V\gamma\beta,$$
wo γ ein unbestimmter Vector ist, und dass
$$\dot{V}\alpha\beta = 0$$
gleichbedeutend ist mit $$\alpha = x\beta,$$
wo x eine unbestimmte Scalar ist.

99.) Schreiben wir wie in § 86:
$$\alpha = ix + jy + kz,$$
$$\beta = ix' + jy' + kz',$$
so folgt aus § 86
$$S\alpha\beta = -xx' - yy' - zz'$$
$$= -rr'\left(\frac{x}{r}\frac{x'}{r'} + \frac{y}{r}\frac{y'}{r'} + \frac{z}{r}\frac{z}{r'}\right),$$
wo $$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{und} \quad r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2};$$
und $$V\alpha\beta = rr'\left\{\frac{yz' - zy'}{rr'}\,i + \frac{zx' - xz'}{rr'}\,j + \frac{xy' - yx'}{rr'}\right\}.$$

Dies sind in Cartesischen Coordinaten die Sätze, die wir eben bewiesen haben. Es mag dem Anfänger von Nutzen sein, statt der Quaternionenausdrücke diese ihm bekannten Formen zu sehen; er wird sich auch ohne Zweifel dadurch bestimmen lassen, das begonnene Studium fortzusetzen, denn schon jetzt kann er sehen, wieviel einfacher die Quaternionenausdrücke sind, als die Formeln der analytischen Geometrie.

100.) Der Ausdruck $$S.\alpha\beta\gamma$$
kann geschrieben werden $$S(V\alpha\beta)\gamma,$$
denn die Quaternion $\alpha\beta\gamma$ kann zerlegt werden in
$$(S\alpha\beta)\gamma + (V\alpha\beta)\gamma,$$
und das erste Glied ist ein Vector.

Nach § 96 ist aber
$$S(V\alpha\beta)\gamma = T\alpha\, T\beta \sin\vartheta\, S\eta\gamma,$$
wo $T\eta = 1$; ist φ der Winkel zwischen η und γ, so hat man schliesslich
$$S.\alpha\beta\gamma = -T\alpha\, T\beta\, T\gamma \sin\vartheta\cos\varphi.$$
Da η auf α und β senkrecht steht, so ist $T\gamma\cos\varphi$ die Länge des Perpendikels vom Endpunkte γ auf die Ebene von α, β. Das

Product der übrigen drei Factoren ist (§ 96) der Inhalt des Parallelogramms, dessen Seiten α und β sind. Sieht man vom Vorzeichen ab, so folgt daraus, dass $S\alpha\beta\gamma$ gleich ist dem *Volumen des Parallelepipedons, dessen drei Kanten sind* α, b, γ; oder dem sechsfachen Volumen der Pyramide, deren Kanten α, β, γ sind.

101.) Demnach bedeutet die Gleichung

$$S.\alpha\beta\gamma = 0,$$

wenn α, β, γ wirkliche Vectoren sind, dass

$$\sin\vartheta = 0$$

oder

$$\cos\varphi = 0,$$

d. h. zwei der drei Vectoren sind parallel, oder alle drei sind einer Ebene parallel.

Dies ist in Uebereinstimmung mit früheren Resultaten, denn ist $\gamma = p\beta$, so haben wir

$$S.\alpha\beta\gamma = pS.\alpha\beta^2 = 0;$$

und ist γ complanar mit α, β, so haben wir $\gamma = p\alpha + q\beta$ und

$$S.\alpha\beta\gamma = S.\alpha\beta(p\alpha + q\beta) = 0.$$

102.) Diese Eigenschaft des Ausdruckes $S.\alpha\beta\gamma$ weist darauf hin, dass man ihn in die Form einer Determinante bringen kann. Und in der That, nehmen wir für α, β die Form des § 83 und hierzu

$$\gamma = ix'' + jy'' + kz'',$$

so folgt unmittelbar:

$$S.\alpha\beta\gamma = -x''(yz' - zy') - y''(zx' - xz') - z\ (xy - yx')$$

$$= -\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}.$$

Die Determinante wechselt ihr Vorzeichen, wenn zwei Reihen ihre Stelle wechseln. Dies ist der Satz, den wir in § 89 in der Form hatten

$$S.\alpha\beta\gamma = -S.\beta\alpha\gamma = S.\beta\gamma\alpha \text{ u. s. w.}$$

Nehmen wir folgende drei Vectoren:

$$\alpha_1 = ix + jx' + kx'',$$
$$\beta_1 = iy + jy' + ky'',$$
$$\gamma_1 = iz + jz' + kz'',$$

so sehen wir, dass diese drei complanar sind, wenn α, β, γ es sind. Das heisst, wenn

$$S.\alpha\beta\gamma = 0$$

dann ist auch

$$S.\alpha_1\beta_1\gamma_1 = 0.$$

103.) Nach § 52 ist

$$(Tq)^2 = qKq = (Sq + Vq)(Sq - Vq) \quad (\S\ 79),$$
$$= (Sq)^2 - (Vq)^2 \text{ durch Multiplication,}$$
$$= (Sq)^2 + (TVq)^2 \quad (\S\ 73).$$

Ist $q = \alpha\beta$, so ist $Kq = \beta\alpha$, und wir haben:

$$\alpha\beta \,.\, \beta\alpha = \alpha^2\beta^2 = (S\alpha\beta)^2 - (V\alpha\beta)^2.$$

In Cartesischen Coordinaten ist dies

$$(x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2)$$
$$= (xx' + yy' + zz')^2 + (yz' - zy')^2 + (zx' - xz')^2 + (xy' - yx')^2.$$

In grösserer Allgemeinheit haben wir:

$$[T(qr)]^2 = qrK(qr)$$
$$= qrKrKq\ (\S\ 55) = (Tq)^2(Tr)^2\ (\S\ 52).$$

Schreiben wir $q = w + \alpha = w + ix + jy + kz$,

$r = w' + \beta = w' + ix' + jy' + kz'$,

so wird dies:

$$(w^2 + x^2 + y^2 + z^2)(w'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2)$$
$$= (ww' - xx' - yy' - zz')^2 + (wx' + w'x + yz' - zy')^2$$
$$+ (wy' + w'y + zx' - xz')^2 + (wz' + wz' + xy' - yx')^2,$$

eine algebraische Formel, die von Euler herstammt.

104.) Man erhält durch Ausmultipliciren:

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha + \beta^2 = \alpha^2 + 2S\alpha\beta + \beta^2. \ (\S\ 86\ (3)).$$

Ueberträgt man dies in die gewöhnliche Bezeichnungsweise der ebenen Trigonometrie, so erhält man

$$c^2 = a^2 - 2ab\cos C + b^2,$$

die bekannte Formel.

Weiter $V(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = -V\alpha\beta + V\beta\alpha = -2V\alpha\beta$ (§ 86 (2)).

Nehmen wir Tensoren auf beiden Seiten, so können wir den Satz aussprechen: *Das Parallelogramm, dessen Seiten den Diagonalen eines gegebenen Parallelogramms gleich und parallel sind, hat dessen doppelten Inhalt* (§ 96).

Der Ausdruck $S(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$

kann nur verschwinden, wenn $\alpha^2 = \beta^2$, oder $T\alpha = T\beta$; dies heisst: *die Diagonalen eines Parallelogramms stehen senkrecht aufeinander, wenn und nur wenn dieses ein Rhombus ist.*

Wir werden später sehen, dass hierin der Beweis liegt, dass der Winkel, dessen Spitze auf einem Kreise liegt, und dessen Seiten durch die Endpunkte eines Durchmessers desselben gehen, ein rechter ist.

105.) Der Ausdruck $\varrho = \alpha\beta\alpha^{-1}$
ist offenbar ein Vector, dessen Tensor dem Tensor von β gleich ist.

Wir haben $S.\beta\alpha\varrho = 0,$
ϱ liegt also in der Ebene von α, β. Anderseits ist auch

$$S\alpha\varrho = S\alpha\beta,$$

so dass β und ϱ mit α denselben Winkel einschliessen, aber offenbar auf verschiedenen Seiten von α liegen.

Ist demnach α die Normale einer spiegelnden Fläche, β die Richtung des einfallenden Strahles, so ist ϱ die Richtung des reflectirten Strahles.

Man kann dies Resultat auch erhalten, indem man den Ausdruck entwickelt nach § 90 (2), also:

$$\begin{aligned}\varrho &= 2\alpha^{-1}S\alpha\beta - \beta \\ &= 2\alpha^{-1}S\alpha\beta - \alpha^{-1}(S\alpha\beta + V\alpha\beta) \\ &= \alpha^{-1}(S\alpha\beta - V\alpha\beta).\end{aligned}$$

Nehmen wir in der Figur des § 77, $\overline{OA} = \alpha$ und $\overline{OB} = \beta$, dann ist $\overline{OD} = \varrho = \alpha\beta\alpha^{-1}$.

Wir können auch das Resultat unmittelbar erhalten, indem wir die Gleichung umformen in

$$U\frac{\varrho}{\alpha} = U\frac{\alpha}{\beta}.$$

106.) Für drei beliebige complanare Vectoren ist der Ausdruck

$$\varrho = \alpha\beta\gamma$$

ein Vector (§ 101).

Es ist von Interesse zu untersuchen, welcher Vector dies ist. Beschreibt man einen Kreis um das Dreieck, von dem α und β zwei Seiten sind (in dieser Reihenfolge), und zieht man vom Endpunkte β eine Parallele zu γ, die den Kreis schneidet, so sieht man leicht, dass der Vector, der den Anfangspunkt von α mit jenem Schnittpunkte verbindet, die Richtung des Vectors $\alpha\beta\gamma$ hat. Denn wir können dies in der Form schreiben:

$$\varrho = \alpha\beta^2\beta^{-1}\gamma = -(T\beta)^2\alpha\beta^{-1}\gamma = -(T\beta)^2\frac{\alpha}{\beta}\gamma,$$

und hieraus sieht man, dass der Versor $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$, welcher β in eine Richtung parallel zu α bringt, γ mit ϱ parallel macht. Dies ist der Ausdruck der bekannten Eigenschaft der gegenüberliegenden Winkel eines in einen Kreis eingeschriebenen Vierecks.

Sind demnach α, β, γ die Seiten eines Dreiecks, so sind die in den Eckpunkten desselben an den umschriebenen Kreis gelegten Tangenten folgenden Vectoren parallel:

$$\alpha\beta\gamma, \quad \beta\gamma\alpha \quad \text{und} \quad \gamma\alpha\beta.$$

Nehmen wir an, zwei derselben seien parallel, d. h. es sei

$$\alpha\beta\gamma = x\beta\gamma\alpha = x\alpha\gamma\beta \quad (\S\ 90),$$

da der Ausdruck ein Vector ist.

Hieraus $$\beta\gamma = x\gamma\beta.$$

Es muss also entweder

$$x = 1, \quad V\gamma\beta = 0 \quad \text{oder} \quad \gamma \parallel \beta,$$

ein Fall, den die Aufgabe nicht einschliesst,

oder $$x = -1, \qquad S\beta\gamma = 0,$$

das heisst, wir haben es mit einem rechtwinkligen Dreiecke zu thun. Die Geometrie lehrt, dass dies in der That so ist.

In einem gleichschenkligen Dreiecke ist die Tangente an der Spitze der Basis parallel. Hier ist also

$$x\beta = \alpha\beta\gamma,$$

oder $$x(\alpha + \gamma) = \alpha(\alpha + \gamma)\gamma;$$

hieraus $$x = \gamma^2 = \alpha^2 \quad \text{oder} \quad T\gamma = T\alpha.$$

Als elegante Erweiterung dieses Satzes mag der Leser beweisen, dass der Vector des Productes $\alpha\beta\gamma\delta$ der Vectorseiten eines in eine Kugel eingeschriebenen Vierecks dem Radius parallel ist, der nach dem Eckpunkte $(\alpha\delta)$ führt.

107.) Als Beispiel der Mannigfaltigkeit der Umformungen, die selbst einfache Ausdrücke zulassen, wollen wir zwei Fälle wählen, die in geometrischen Aufgaben häufig auftreten.

Nehmen wir $$T(\varrho + \alpha) = T(\varrho - \alpha).$$

Wenn $\overline{OA} = \alpha$, $\overline{OA'} = -\alpha$ und $\overline{OP} = \varrho$, so drückt dies aus, dass $AP = A'P$, dass also P ein beliebiger Punkt ist, der gleich weit von A und A' absteht. Obigen Ausdruck können wir nun schreiben

$$(\varrho + \alpha)^2 = (\varrho - \alpha)^2$$

oder $$\varrho^2 + 2S\alpha\varrho + \alpha^2 = \varrho^2 - 2S\alpha\varrho + \alpha^2 \quad (\S\ 104),$$

hieraus $$S\alpha\varrho = 0.$$

Dies kann wieder umgewandelt werden in

$$\alpha\varrho + \varrho\alpha = 0,$$

oder $$\alpha\varrho + K\alpha\varrho = 0,$$

$$SU\frac{\varrho}{\alpha} = 0,$$

und schliesslich $$TVU\frac{\varrho}{\alpha} = 1.$$

Jeder dieser Ausdrücke entspricht einer Eigenschaft der Ebene.

Weiter $$T\varrho = T\alpha$$

kann geschrieben werden

$$T\frac{\varrho}{\alpha} = 1,$$

$$\left(S\frac{\varrho}{\alpha}\right)^2 - \left(V\frac{\varrho}{\alpha}\right)^2 = 1,$$

$$(\varrho+\alpha)^2 - 2S\alpha(\varrho+\alpha) = 0,$$

$$\varrho = (\varrho+\alpha)^{-1}\alpha(\varrho+\alpha),$$

$$S(\varrho+\alpha)(\varrho-\alpha) = 0,$$

und zum Schluss $$T.(\varrho+\alpha)(\varrho-\alpha) = 2TV\alpha\varrho,$$

und alle diese drücken Eigenschaften der Kugel aus. Wir werden sie deuten, wenn wir zu den geometrischen Anwendungen kommen.

108.) Wir sahen in § 95, dass eine Quaternion in Scalar- und Vectortheil zerlegt werden kann wie folgt:

$$\frac{\beta}{\alpha} = S\frac{\beta}{\alpha} + V\frac{\beta}{\alpha} = \frac{T\beta}{T\alpha}(\cos\vartheta + \varepsilon\sin\vartheta);$$

wo ϑ der Winkel zwischen α und β ist, und $\varepsilon = UV\frac{\beta}{\alpha}$ der Einheitsvector senkrecht auf der Ebene von α und β und so gerichtet, dass eine positive (links) Drehung um denselben α zu β hinführt. Dem entsprechend haben wir (§ 96):

$$\alpha\beta = S\alpha\beta + V\alpha\beta$$
$$= T\alpha\,T\beta\,(-\cos\vartheta + \varepsilon\sin\vartheta),$$

wo ϑ und ε dieselbe Bedeutung wie oben haben.

109.) Betrachten wir den Versortheil allein, so haben wir:

$$U\frac{\beta}{\alpha} = \cos\vartheta + \varepsilon\sin\vartheta;$$

und dem entsprechend $U\frac{\gamma}{\beta} = \cos\varphi + \varepsilon\sin\varphi;$

φ ist der positive Winkel zwischen γ und β, und ε derselbe Vector wie oben, wenn α, β, γ complanar sind.

Wir haben aber auch

$$U\frac{\gamma}{\alpha} = \cos(\vartheta+\varphi) + \varepsilon\sin(\vartheta+\varphi).$$

Aber es ist stets

$$\frac{\gamma}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

und deshalb $$U\frac{\gamma}{\beta}\cdot U\frac{\beta}{\alpha} = U\frac{\gamma}{\alpha};$$

oder $$\cos(\varphi+\vartheta) + \varepsilon\sin(\varphi+\vartheta) = (\cos\varphi+\varepsilon\sin\varphi)(\cos\vartheta+\varepsilon\sin\vartheta)$$
$$= \cos\varphi\cos\vartheta - \sin\varphi\sin\vartheta + \varepsilon(\sin\varphi\cos\vartheta + \cos\varphi\sin\vartheta).$$

Setzt man die entsprechenden Scalar- und Vectortheile dieser Quaternionen einander gleich, so erhält man die Fundamentalformeln für die Cosinus und Sinus der Summe zweier Bögen.

Als unmittelbare Folge dieser Ausdrücke ergibt sich

$$\cos m\vartheta + \varepsilon \sin m\vartheta = (\cos\vartheta + \varepsilon \sin\vartheta)^m$$

wo m eine positive ganze Zahl ist.

Das Glied auf der linken Seite ist ein Versor, der eine Drehung um den Winkel $m\vartheta$ hervorruft, während das Glied auf der rechten Seite ein Versor ist, der dasselbe leistet durch m aufeinander folgende Drehungen, jede um den Winkel ϑ.

110.) Um dies Resultat auf gebrochene Exponenten auszudehnen, haben wir blos $\frac{\vartheta}{n}$ statt ϑ zu schreiben und zu verfahren wie in der gewöhnlichen Trigonometrie.

Aus dem so bewiesenen De Moivre'schen Satze können wir natürlich den Rest der analytischen Trigonometrie ableiten. Da wir die fundamentalen Formeln zur Auflösung der ebenen Dreiecke schon aus einfachen Transformationen von Quaternionenausdrücken hergeleitet haben (§§ 97, 104), so wollen wir jetzt zur sphärischen Trigonometrie übergehen, die sich besonders zur Behandlung mit Quaternionen eignet. Wir können dem Gegenstande hier nicht mehr als einige Paragraphen widmen, doch werden wir im Kapitel X, bei der Kinematik der Drehungen, wieder auf denselben zurückkommen. Was die Behandlung dieses Gegenstandes durch Quaternionen-Exponentialgrössen betrifft, verweisen wir dem Leser auf Hamilton's Werke.

111.) α, β, γ seien Einheits-Vectoren, gezogen vom Mittelpunkte aus nach A, B, C, den Eckpunkten des Dreiecks auf der Kugel vom Radius Eins. Nach der gewöhnlichen Bezeichnungsweise haben wir dann (§ 96)

$$S\alpha\beta = -\cos c, \qquad S\beta\gamma = -\cos a, \qquad S\gamma\alpha = -\cos b,$$
$$TV\alpha\beta = \sin c, \qquad TV\beta\gamma = \sin a, \qquad TV\gamma\alpha = \sin b.$$

$UV\alpha\beta$, $UV\beta\gamma$, $UV\gamma\alpha$ sind offenbar die Vectoren der Eckpunkte des Polardreiecks. Folglich:

$$S.\,UV\alpha\beta\, UV\beta\gamma = \cos B, \text{ u. s. w.}$$
$$TV.\,UV\alpha\beta\, UV\beta\gamma = \sin B, \text{ u. s. w.}$$

Nun ist
$$SV\alpha\beta\, V\beta\gamma = S.\,\alpha V.\,\beta V\beta\gamma$$
$$= -S\alpha\beta S\beta\gamma + \beta^2 S\alpha\gamma \quad (\S\ 90\ (1));$$

da nun
$$SV\alpha\beta\, V\beta\gamma = -TV\alpha\beta\, TV\beta\gamma S.\,UV\alpha\beta\, U\beta\gamma,$$

so können wir obige Gleichung auch schreiben:

$$\sin a \sin c \cos B = -\cos a \cos c + \cos b,$$

oder
$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B.$$

112.) Es ist: $V.V\alpha\beta V\beta\gamma = -\beta S.\alpha\beta\gamma,$

hieraus $TV.V\alpha\beta V\beta\gamma = S.\alpha\beta\gamma = S.\alpha V\beta\gamma = S.\beta V\gamma\alpha = S.\gamma V\alpha\beta,$

oder $\sin a \sin c \sin B = \sin a \sin p_a = \sin b \sin p_b = \sin c \sin p_c,$

wo p_a den Bogen bezeichnet, der von A senkrecht auf Bc gezogen ist. p_b, p_c haben eine entsprechende Bedeutung.

Man hat also:

$$\sin p_a = \sin c \sin B,$$
$$\sin p_b = \frac{\sin a \sin c}{\sin b} \sin B,$$
$$\sin p_c = \sin a \sin B.$$

113.) Verbinden wir die Resultate der beiden letzten Paragraphen, so folgt:

$$V\alpha\beta . V\beta\gamma = \sin a \sin c \cos B - \beta \sin a \sin c \sin B$$
$$= \sin a \sin c(\cos B - \beta \sin B);$$

hieraus $U.V\alpha\beta V\beta\gamma = (\cos B - \beta \sin B)$
und $U.V\gamma\beta V\beta\alpha = (\cos B + \beta \sin B)$.

Es sind dies Versoren, welche alle Vectoren, die senkrecht auf OB stehen, in negativer oder positiver Richtung um OB als Achse durch den Winkel B drehen.

Wir behandeln ein weiteres Beispiel:

$$\tan B = \frac{\sin B}{\cos B}$$
$$= \frac{TV.V\alpha\beta V\beta\gamma}{S.V\alpha\beta V\beta\gamma}$$
$$= -\beta^{-1}\frac{V.V\alpha\beta V\beta\gamma}{S.V\alpha\beta V\beta\gamma}$$
$$= -\frac{S.\alpha\beta\gamma}{S\alpha\gamma + S\alpha\beta S\beta\gamma} = \text{u. s. w.}$$

Die Deutung eines jeden dieser Ausdrücke liefert einen andern Satz der sphärischen Trigonometrie.

Wir erheben die folgenden, einander gleichen Ausdrücke zum Quadrat: $V.\alpha\beta\gamma$ und $\alpha S\beta\gamma - \beta S\gamma\alpha + \gamma S\beta\alpha;$

α, β, γ seien beliebige Einheits-Vectoren. Wir erhalten:

$$-(V.\alpha\beta\gamma)^2 = S^2\beta\gamma + S^2\gamma\alpha + S^2\alpha\beta + 2S\beta\gamma S\gamma\alpha S\alpha\beta.$$

Das Glied auf der linken Seite kann man schreiben:

$$T^2.\alpha\beta\gamma - S^2.\alpha\beta\gamma$$

hieraus $1 - S^2.\alpha\beta\gamma = S^2\beta\gamma + S^2\gamma\alpha + S^2\alpha\beta + 2S\beta\gamma S\gamma\alpha S\alpha\beta,$

oder $1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c$
$= \sin^2 a \sin^2 p_a =$ u. s. w.
$= \sin^2 a \sin^2 b \sin^2 C =$ u. s. w.,

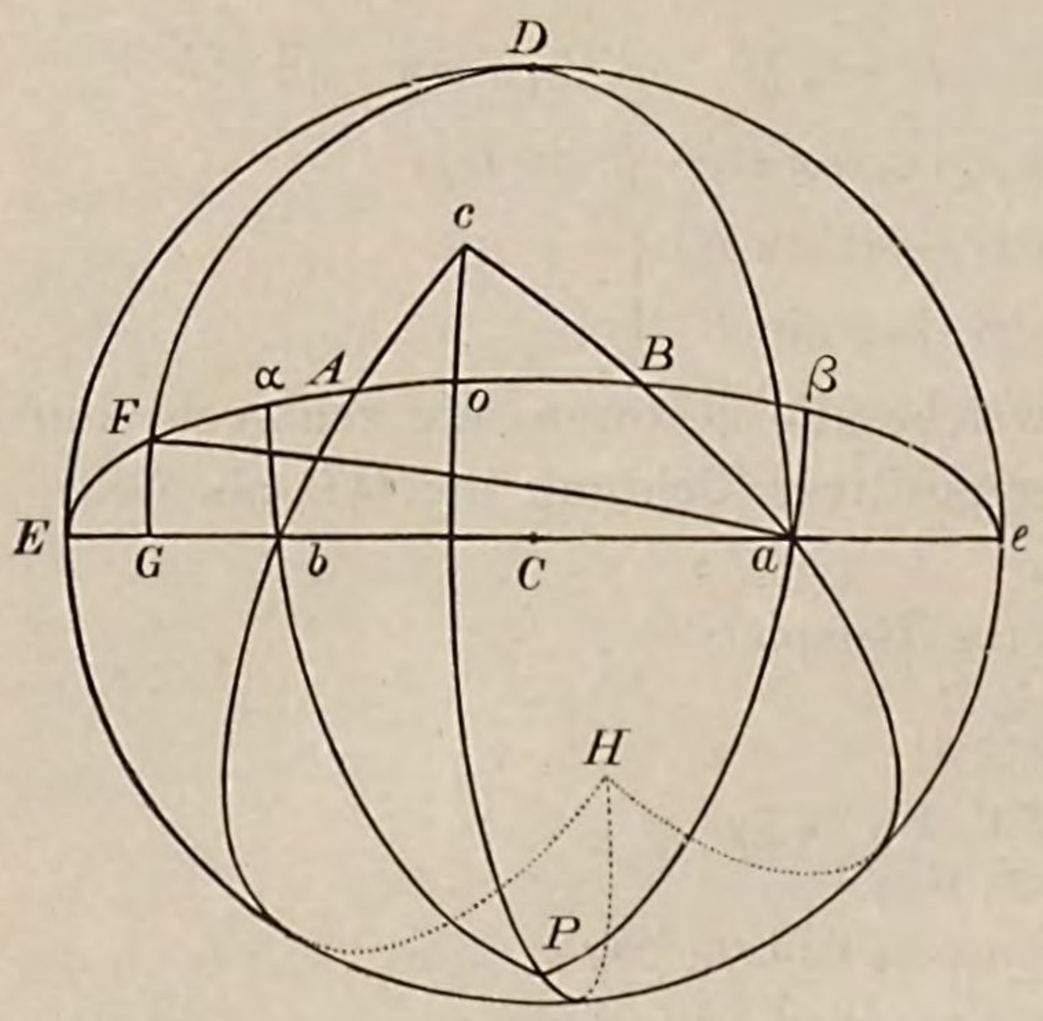
alles wohlbekannte Formeln.

Jeder, der die Elemente der Quaternionen beherrscht, kann derartige Resultate in beliebiger Anzahl herleiten.

114.) Ein merkwürdiger Satz von Hamilton erlaubt den sphärischen Excess eines Dreiecks durch Quaternionen auszudrücken. Obgleich der folgende Beweis, der sich dem seinigen sehr nahe anschliesst, nicht der einfachste ist, den man geben kann, so haben wir ihn dennoch gewählt, weil er nebenbei über manche Punkte Aufschluss gibt.

Die vom Mittelpunkte der Kugel nach A, B, C gezogenen Einheits-Vectoren seien α, β, γ. Man soll nun als Bogen und als Winkel auf der Kugel folgende Quaternion ausdrücken:

$$\beta\alpha^{-1}\gamma.$$



Die Figur stellt eine Verticalprojection auf einer Ebene senkrecht zu γ dar. C ist also der Mittelpunkt des Kreises DEe. Der durch A, B gelegte grösste Kreis schneide DEe in E und e; DE sei ein Quadrant, $\overset{\frown}{DE}$ stellt also γ dar (§ 72). Man nehme auch $\overset{\frown}{EF} = \overset{\frown}{AB} = \beta\alpha^{-1}$. Dann ist offenbar

$$\overset{\frown}{DF} = \beta\alpha^{-1}\gamma$$

die gesuchte Darstellung der Quaternion als Bogen.

DF schneide Ee in G. Man nehme $Ca = EG$ und verbinde D mit a und a mit F. Da D der Pol von Ee ist, so ist Da ein Quadrant; und da $EG = Ca$, $Ga = EC$ ebenfalls ein Quadrant. Demnach ist a der Pol von DG und die Quaternion kann dargestellt werden durch den Winkel DaF.

Man nehme $Cb = Ca$, und ziehe von P, dem Pole von AB, aus die Bogen $Pa\beta$, $Pb\alpha$.

Vergleicht man die Dreiecke $Eb\alpha$ und $ea\beta$, so sieht man, dass $E\alpha = e\beta$. Da P der Pol von AB, so ist $F\beta a$ ein rechter Winkel; da $F\alpha$ ein Quadrant ist, so muss auch $F\beta$ ein Quadrant sein. AB ist also das Complement von $E\alpha$ oder βe und

$$\alpha\beta = 2AB.$$

Man verbinde bA und verlängere den Bogen bis in c, so dass $Ac = bA$; man verbinde c mit P; dieser Bogen schneidet AB in o. Desgleichen verbinde man c, B und B, a.

Da P der Pol von AB, so sind die Winkel in o rechte; die Dreiecke $b\alpha A$, coA sind einander gleich und liefern:

$$\alpha A = Ao,$$

aber $$\alpha\beta = 2AB,$$

folglich $$oB = B\beta,$$

die Dreiecke coB und $Ba\beta$ sind also gleich und c, B, a liegen auf demselben grössten Kreise.

Man verlängere cA und cB bis zu ihrem Schnittpunkte H auf der entgegengesetzten Seite der Kugel. H und c sind die Endpunkte desselben Durchmessers, deshalb geht die Verlängerung von cP durch H.

Nun ist $Pa = Pb = PH$, denn sie unterscheiden sich von Quadranten durch die gleichen Bögen $a\beta$, $b\alpha$, oc. Diese Bögen zerlegen also das Dreieck Hab in drei gleichschenklige Dreiecke.

Nun ist $$\angle PHb + \angle PHa = \angle aHb = \angle bca;$$

und $$\angle Pab = \pi - \angle cab - \angle PaH,$$

$$\angle Pba = \angle Pab = \pi - \angle cba - \angle PbH.$$

Durch Addition $$2\angle Pab = 2\pi - \angle cab - \angle cba - \angle bca$$

$$= \pi - \text{(sphärischer Excess von } abc).$$

Da $\angle Fa\beta$ und $\angle Dae$ rechte Winkel sind, so ist der Winkel von

$$\beta\alpha^{-1}\gamma = \angle FaD = \angle\beta ae = \angle Pab$$

$$= \frac{\pi}{2} - \tfrac{1}{2} \text{ (sphärischer Excess von } abc).$$

[Zahlreiche merkwürdige geometrische Sätze, die leicht *ab initio* durch Quaternionen bewiesen werden, folgen hieraus. Z. B.: Der Bogen AB, welcher die Mittelpunkte zweier Seiten eines sphärischen Dreiecks abc verbindet, schneidet dessen dritte Seite in einem Punkte, der um einen Quadranten vom Mittelpunkte dieser Seite abliegt.

Alle sphärischen Dreiecke, die eine Seite gemeinschaftlich haben und deren andere Seiten durch denselben grössten Kreis in zwei gleiche Theile zerlegt werden (d. h. alle Dreiecke, deren Spitze in einem kleinen Kreise liegen, der jenem grössten Kreise parallel ist) haben gleichen Inhalt u. s. w.]

115.) Es sei $\overline{Oa} = \alpha'$, $\overline{Ob} = \beta'$, $\overline{Oc} = \gamma'$, so haben wir:

$$\left(\frac{\alpha'}{\beta'}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\beta'}{\gamma'}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\gamma'}{\alpha'}\right)^{\frac{1}{2}} = \widehat{Ca}\,.\,\widehat{cA}\,.\,\widehat{Bc}$$

$$= \widehat{Ca}\,.\,\widehat{BA}$$

$$= \widehat{EG}\,.\,\widehat{FE} = \widehat{FG}.$$

FG ist aber das Complement von DF. Der Winkel der Quaternion

$$\left(\frac{\alpha'}{\beta'}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\beta'}{\gamma'}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\gamma'}{\alpha'}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ist also gleich dem halben sphärischen Excess des Dreiecks, dessen Eckpunkte gegeben sind durch die Einheits-Vectoren α', β', γ'.

[Will man diesen Satz mit Quaternionen allein beweisen, so muss man zuerst nachweisen, dass für drei beliebige Einheits-Vectoren man immer hat:

$$\frac{\beta}{\alpha}\frac{\gamma}{\beta}\frac{\alpha}{\gamma} = -(\beta\alpha^{-1}\gamma)^2.$$

Den Winkel der ersten Quaternion kann man leicht angeben; die Gleichung lehrt dann den von $\beta\alpha^{-1}\gamma$ finden.

Einen noch einfachern Beweis kann man leicht aus der Zusammensetzung von Rotationen ableiten.]

116.) Eine Scalargleichung in ϱ, wo ϱ der Vector eines unbestimmten Punktes ist, stellt im allgemeinen eine Fläche dar; wir können nämlich statt ϱ setzen

$$\varrho = x\alpha,$$

wo x eine unbekannte Scalar und α ein beliebiger Einheits-Vector ist. Man erhält so eine Gleichung, die x bestimmt. Man findet auf diese Weise einen oder mehrere Punkte auf $x\alpha$, die der Gleichung genügen; der geometrische Ort dieser Punkte ist eine Fläche, deren Grad bestimmt ist durch den Grad der Gleichung, welche x bestimmt.

Eine Vectorgleichung in ϱ hingegen führt, wie wir gesehen haben, im allgemeinen zu drei Scalargleichungen, und hieraus kann man die drei rechtwinkligen oder andere Componenten des Vectors ableiten. Eine solche Vectorgleichung bestimmt also im allgemeinen eine Anzahl von *Punkten* im Raume.

In gewissen Fällen können diese eine *Linie* und selbst eine *Fläche* bilden; die Vectorgleichung verliert dann gleichsam eine oder zwei der Scalargleichungen, mit denen sie gewöhnlich gleichbedeutend ist.

So gibt die Gleichung

$$\alpha\varrho = \beta$$

sofort

$$\varrho = \alpha^{-1}\beta,$$

und dies ist der Vector eines bestimmten Punktes (denn offenbar:

$$S\alpha\beta = 0);$$

die nahe verwandte Gleichung

$$V\alpha\varrho = \beta$$

bedingt

$$S\alpha\beta = 0,$$

ihr genügt

$$\varrho = \alpha^{-1}\beta + x\alpha$$

für jedes x. Der Vector eines jeden Punktes in der Geraden, die

α parallel durch den Endpunkt von $\alpha^{-1}\beta$ gezogen wird, genügt also dieser Gleichung.

117.) Die Gleichung

$$V\alpha\varrho \,.\, V\varrho\beta = (V\alpha\beta)^2$$

ist gleichbedeutend mit nur zwei Scalargleichungen. Denn es folgt aus ihr, dass $V\alpha\varrho$ und $V\beta\varrho$ parallel sind, d. h. ϱ liegt in der Ebene von α und β, und kann deshalb geschrieben werden (§ 24):

$$\varrho = x\alpha + y\beta,$$

wo x und y zwei zu bestimmende Scalaren sind.

Wir haben nun

$$V\alpha\varrho = y\,V\alpha\beta$$
$$V\varrho\beta = x\,V\alpha\beta;$$

in Verbindung mit der gegebenen Gleichung liefert dies

$$xy = 1 \quad \text{oder} \quad y = \frac{1}{x},$$

oder schliesslich $$\varrho = x\alpha + \frac{1}{x}\beta;$$

nach § 40 ist dies die Gleichung einer Hyperbel, deren Asymptoten die Richtungen α und β haben.

118.] Die Gleichung

$$V \,.\, V\alpha\beta\, V\alpha\varrho = 0,$$

obgleich dem Anschein nach gleichbedeutend mit drei Scalargleichungen, ist in Wirklichkeit nur gleichbedeutend mit einer einzigen.

In der That sehen wir, dass man nach § 91 schreiben kann

$$-\alpha S \,.\, \alpha\beta\varrho = 0;$$

ist α von Null verschieden, so ist

$$S \,.\, \alpha\beta\varrho = 0$$

und somit unterliegt ϱ der einzigen Bedingung, in der Ebene α, β zu liegen (§ 101). Die Gleichung stellt also die Ebene von α, β dar.

119.) Man erhält einige merkwürdige Resultate, wenn wir nach diesem Verfahren Functionen einer *Quaternion*

$$q = w + \varrho$$

zu deuten versuchen, anstatt einer Function eines blossen *Vectors* ϱ.

Eine Scalargleichung, die eine solche Quaternion und Quaternionenconstante enthält, liefert, wie im vorigen Paragraphen, die Gleichung einer Fläche, wenn wir w einen bestimmten Werth geben. Aendert w sich stetig, so erhalten wir eine Reihe von Flächen eines Systems, die sich stetig aneinander schliessen; ist w unbestimmt, so stellt die Gleichung nicht wie oben eine *Fläche* dar, sondern ein

Volumen in dem Sinne, dass der Vector eines jeden Punktes innerhalb jenes Volumens der Gleichung genügt.

Die Gleichung $$(Tq)^2 = a^2$$

oder $$w^2 - \varrho^2 = a^2$$

oder $$T\varrho^2 = a^2 - w^2$$

stellt für jeden Werth von w, kleiner als a, eine Kugelfläche dar, deren Radius $\sqrt{a^2 - w^2}$ ist. Der Gleichung wird also genügt durch den Vector eines jeden Punktes im Innern der Kugel, deren Radius a ist und deren Mittelpunkt im Anfangspunkte liegt.

Durch eine ähnliche Betrachtung findet man, dass

$$[T(q - \beta)]^2 = a^2,$$

wo $q = w + \varrho$, das Volumen der Kugel darstellt, die mit dem Radius a vom Endpunkte von β als Mittelpunkt aus beschrieben wurde.

$S(q)^2 = -a^2$ stellt den unendlichen Raum dar, mit Ausnahme des Raumes innerhalb einer Kugel vom Radius a um den Anfangspunkt als Mittelpunkt.

Aehnliche Resultate erhält man bei der Deutung von Vectorgleichungen von Quaternionen.

120.) Folgende Umformung führt Hamilton ohne Beweis an. (Lectures p. 587, und Elements p. 299)

$$r^{-1}(r^2q^2)^{\frac{1}{2}}q^{-1} = U(rq + KrKq).$$

Um dies zu beweisen, setzen wir

$$r^{-1}(r^2q^2)^{\frac{1}{2}}q^{-1} = t,$$

dann ist $$Tt = 1,$$

und $$Kt = t^{-1}.$$

Aber $$(r^2q^2)^{\frac{1}{2}} = rtq,$$

oder $$r^2q^2 = rtqrtq,$$

oder $$rq = tqrt,$$

hieraus $$KqKr = t^{-1}KrKqt^{-1},$$

oder $$KrKq = tKqKrt.$$

Wir haben also $U(rq \pm KrKq) = tU(qr \pm KqKr)t,$

oder wenn wir setzen $$s = U(qr \pm KqKr),$$

$$Ks = \pm tst,$$

folglich $$1 = (Ts)^2 = sKs = \pm stst;$$

nehmen wir das positive Vorzeichen, so muss sein

$$st = \pm 1,$$

oder $$t = \pm s^{-1} = \pm UKs,$$

und dies ist die verlangte Umformung.

[Zu bemerken ist, dass man andere Resultate erhalten würde, wenn man das negative Zeichen gewählt hätte; dies hätte zur Folge die Einführung eines willkürlichen Einheits-Vectors oder des Imaginairen der gewöhnlichen Algebra.]

121.) Zum Schluss behandeln wir eine Umformung die von Hamilton herstammt und von grosser Wichtigkeit ist in der Theorie der Flächen zweiter Ordnung.

Der Ausdruck

$$(S\alpha\varrho)^2 + (S\beta\varrho)^2 + (S\gamma\varrho)^2,$$

wo α, β, γ drei aufeinander senkrecht stehende Vectoren sind, soll umgeformt werden in

$$\left(\frac{T(\iota\varrho + \varrho\varkappa)}{\varkappa^2 - \iota^2}\right)^2,$$

wo nunmehr zwei Vector-Constanten, ι und $\varkappa$, auftreten.

$$\{T(\iota\varrho + \varrho\varkappa)\}^2 = (\iota\varrho + \varrho\varkappa)(\varrho\iota + \varkappa\varrho) \qquad \text{§§ 52, 55.}$$
$$= (\iota^2 + \varkappa^2)\varrho^2 + (\iota\varrho\varkappa\varrho + \varrho\varkappa\varrho\iota)$$
$$= (\iota^2 + \varkappa^2)\varrho^2 + 2S.\iota\varrho\varkappa\varrho$$
$$= (\iota - \varkappa)^2\varrho^2 + 4S\iota\varrho S\varkappa\varrho.$$

Hieraus $(S\alpha\varrho)^2 + (S\beta\varrho)^2 + (S\gamma\varrho)^2 = \frac{(\iota - \varkappa)^2}{(\varkappa^2 - \iota^2)^2}\varrho^2 + 4\frac{S\iota\varrho S\varkappa\varrho}{(\varkappa^2 - \iota^2)^2}$.

Nun ist aber:

$$\alpha^{-2}(S\alpha\varrho)^2 + \beta^{-2}(S\beta\varrho)^2 + \gamma^{-2}(S\gamma\varrho)^2 = \varrho^2 \quad [\text{§§ 25, 73}];$$

multiplicirt man mit β^2 und zieht von dem vorhergehenden ab:

$$\left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)(S\alpha\varrho)^2 - \left(\frac{\beta^2}{\gamma^2} - 1\right)(S\gamma\varrho)^2 = \left\{\frac{(\iota - \varkappa)^2}{(\varkappa^2 - \iota^2)^2} - \beta^2\right\}\varrho^2 + 4\frac{S\iota\varrho S\varkappa\varrho}{(\varkappa^2 - \iota^2)^2}.$$

Die linke Seite zerfällt in zwei reelle Factoren, wenn β^2 zwischen α^2 und γ^2 liegt. Soll auch die rechte Seite in zwei Factoren zerlegt werden können, so muss das Glied in ϱ^2 verschwinden. Diese Bedingung liefert:

$$\beta^2 = \frac{(\iota - \varkappa)^2}{(\varkappa^2 - \iota^2)^2};$$

die Identität wird:

$$S\left(\alpha V\left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) + \gamma V\left(\frac{\beta^2}{\gamma^2} - 1\right)\right)\varrho\, S\left(\alpha V\left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) - \gamma V\left(\frac{\beta^2}{\gamma^2} - 1\right)\varrho\right.$$
$$= 4\frac{S\iota\varrho S\varkappa\varrho}{(\varkappa^2 - \iota^2)^2}.$$

Demnach muss sein:

$$\frac{2\iota}{\varkappa^2 - \iota^2} = p\left(\alpha V\left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) + \gamma V\left(\frac{\beta^2}{\gamma^2} - 1\right)\right),$$
$$\frac{2\varkappa}{\varkappa^2 - \iota^2} = \frac{1}{p}\left(\alpha V\left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) - \gamma V\left(\frac{\beta^2}{\gamma^2} - 1\right)\right),$$

wo p eine unbestimmte Scalar ist.

Um p zu bestimmen, substituiren wir in dem Ausdruck für β^2, und erhalten:

$$4\beta^2 = \frac{4(\iota-\varkappa)^2}{(\varkappa^2-\iota^2)^2} = \left(p-\frac{1}{p}\right)^2(\alpha^2-\beta^2)+\left(p+\frac{1}{p}\right)\left(\beta^2-\gamma^2\right)$$
$$= \left(p^2+\frac{1}{p^2}\right)\left(\alpha^2-\gamma^2\right)-2\left(\alpha^2+\gamma^2\right)4\beta^2.$$

Die Transformation ist also möglich wenn

$$p^2+\frac{1}{p^2} = \frac{2(\alpha^2+\gamma^2)}{\alpha^2-\gamma^2};$$

dies liefert

$$p+\frac{1}{p} = \pm 2\sqrt{\frac{\alpha^2}{\alpha^2-\gamma^2}},$$
$$p-\frac{1}{p} = \pm 2\sqrt{\frac{\gamma^2}{\alpha^2-\gamma^2}}.$$

Hieraus $$\frac{4(\varkappa^2-\iota^2)}{(\varkappa^2-\iota^2)^2} = \left(\frac{1}{p}-p^2\right)(\alpha^2-\gamma^2) = \pm 4\sqrt{\alpha^2\gamma^2},$$

oder $$(\varkappa^2-\iota^2)^{-1} = \pm T\alpha\, T\gamma.$$

Weiter: $$p = \frac{T\alpha+T\gamma}{\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}}, \qquad \frac{1}{p} = \frac{T\alpha-T\gamma}{\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}},$$

folglich

$$2\iota = \frac{T\alpha+T\gamma}{T\alpha\, T\gamma}\left(\sqrt{\frac{\beta^2-\alpha^2}{\gamma^2-\alpha^2}}\,U\alpha+\sqrt{\frac{\gamma^2-\beta^2}{\gamma^2-\alpha^2}}\,U\gamma\right),$$
$$2\varkappa = \frac{T\alpha-T\gamma}{T\alpha\, T\gamma}\left(\sqrt{\frac{\beta^2-\alpha^2}{\gamma^2-\alpha^2}}\,U\alpha-\sqrt{\frac{\gamma^2-\beta^2}{\gamma^2-\alpha^2}}\,U\gamma\right).$$

Wir haben also die Möglichkeit der Umformung bewiesen und die transformirenden Vectoren, ι und $\varkappa$, bestimmt.

122.) Differentiirt man die Gleichung

$$(S\alpha\varrho)^2+(S\beta\varrho)^2+(S\gamma\varrho)^2 = \left(\frac{T(\iota\varrho+\varrho\varkappa)}{\varkappa^2-\iota^2}\right)^2,$$

so erhalten wir, wie man in Kapitel IV sehen wird:

$$S\alpha\varrho S\alpha\varrho'+S\beta\varrho S\beta\varrho'+S\gamma\varrho S\gamma\varrho' = \frac{S.(\iota\varrho+\varrho\varkappa)(\varkappa\varrho'+\varrho'\iota)}{(\varkappa^2-\iota^2)^2},$$

wo ϱ' ein beliebiger Vector ist.

Es ist dies eine andere sehr wichtige Transformationsformel; es ist eine gute Uebung für den Leser, deren Richtigkeit nachzuweisen durch ein Verfahren ähnlich dem eben befolgten. Wir wollen noch bemerken, was eigentlich selbstverständlich ist, dass, setzt man $\varrho' = \varrho$, der Ausdruck in den obigen übergeht. Werden ι und $\varkappa$ wie oben durch α, β, γ ausgedrückt, so gilt die Identität:

$$\alpha S\alpha\varrho+\beta S\beta\varrho+\gamma S\gamma\varrho = \frac{(\iota^2+\varkappa^2)\varrho+2V.\iota\varrho\varkappa}{(\varkappa^2-\iota^2)^2} = \frac{(\iota-\varkappa)^2\varrho+2(\iota S\varkappa\varrho+\varkappa S\iota\varrho)}{(\varkappa^2-\iota^2)^2}.$$

123.) In manchen Quaternionen-Untersuchungen, besonders solchen, wo man es mit *imaginären* Schnitten von Curven und Flächen zu thun hat, treten die alten imaginairen Ausdrücke der Algebra wieder auf. Man muss besonders darauf achten, dass diese Aus-

drücke einer Scalar, nicht einem Vector entsprechen, und wie jede Scalar in der Multiplication commutativ sind. Man beweist auf dieselbe Weise wie in der Algebra, dass ein Quaternionenausdruck, der diese imaginaire Grösse enthält, in zwei Theile zerlegt werden kann, deren einer reell, der andere durch $\sqrt{-1}$ multiplicirt ist. Ein Ausdruck wie

$$q = q' + \sqrt{-1}\,q'',$$

wo q' und q'' reelle Quaternionen sind, nennt man eine **Biquaternion.** Man muss etwas vorsichtig sein beim Behandeln dieser Ausdrücke, aber es entstehen keine neuen Schwierigkeiten dabei. Man hat besonders zu beachten: erstens, dass jede Biquaternion zerlegt werden kann in einen reellen und einen imaginairen Theil; letzterer ist das Product aus einer reellen Quaternion und $\sqrt{-1}$; zweitens, dass dies $\sqrt{-1}$ in der Multiplication mit allen andern Grössen commutativ ist; drittens, dass wenn zwei Biquaternionen einander gleich sind, wie

$$q' + \sqrt{-1}\,q'' = r' + \sqrt{-1}\,r'',$$

wir, wie in der Algebra, haben:

$$q' = r', \qquad q'' = r''.$$

Eine Gleichung zwischen Biquaternionen ist also im allgemeinen gleichbedeutend mit *acht* Gleichungen zwischen Scalaren (man vergleiche § 80).

124.) Da $\sqrt{-1}$ eine Scalar, so ist:

$$S(q' + \sqrt{-1}\,q'') = Sq' + \sqrt{-1}\,Sq'',$$
$$V(q' + \sqrt{-1}\,q'') = Vq' + \sqrt{-1}\,Vq''.$$

Hieraus (§ 103):

$$\{T(q' + \sqrt{-1}\,q'')\}^2$$
$$= (Sq' + \sqrt{-1}\,Sq'' + Vq' + \sqrt{-1}\,Vq'')(Sq' + \sqrt{-1}\,Sq'' - Vq' - \sqrt{-1}\,Vq''),$$
$$= (Sq' + \sqrt{-1}\,Sq'')^2 - (Vq' + \sqrt{-1}\,Vq'')^2,$$
$$= (Tq')^2 - (Tq'')^2 + 2\sqrt{-1}\,S.q'Kq''.$$

Die einzige Bemerkung, die wir über eine derartige Formel zu machen haben, ist, dass der *Tensor einer Biquaternion verschwinden kann, während die Quaternionen, aus denen er zusammengesetzt ist, nicht verschwinden.*

Ist $$Tq' = Tq'',$$

und $$S.q'Kq'' = 0,$$

so gibt obige Formel:

$$T(q' + \sqrt{-1}\,q'') = 0.$$

Die Bedingung $S.q'Kq'' = 0$
kann man schreiben:

$$Kq'' = q'^{-1}\alpha, \quad \text{oder} \quad q'' = -\alpha Kq'^{-1} = -\frac{\alpha q'}{(Tq')^2},$$

wo α ein beliebiger Vector ist.

Hieraus $$Tq' = Tq'' = TKq'' = \frac{T\alpha}{Tq'},$$

und $$Tq'(Uq' - \sqrt{-1}\,U\alpha.Uq') = (1 - \sqrt{-1}\,U\alpha)q'$$

ist die allgemeine Form einer Biquaternion, deren Tensor Null ist.

125.) In grösserer Allgemeinheit haben wir, wenn q, r, q', r' vier reelle, von Null verschiedene Quaternionen sind,

$$(q + \sqrt{-1}\,q')(r + \sqrt{-1}r') = qr - q'r' + \sqrt{-1}(qr' + q'r).$$

Soll dies Product verschwinden, so muss sein

$$qr = q'r',$$

und $$qr' = -q'r.$$

Eliminirt man r', so folgt:

$$qq'^{-1}qr = -q'r,$$

$$(q'^{-1}q)^2 = -1,$$

d. h. $$q = q'\alpha,$$

wo α ein beliebiger Einheits-Vector ist.

Aus beiden Gleichungen folgt:

$$-r = \alpha r';$$

wir erhalten die Biquaternionen-Factoren in der Form:

$$q'(\alpha + \sqrt{-1}) \quad \text{und} \quad -(\alpha - \sqrt{-1})r';$$

und ihr Product ist

$$-q'(\alpha + \sqrt{-1})(\alpha - \sqrt{-1})r',$$

und dies ist natürlich gleich Null.

[Man kann dieselbe Untersuchung auf etwas einfachere Weise durchführen, wenn man die Biquaternionen schreibt:

$$q'(q'^{-1}q + \sqrt{-1}) \quad \text{und} \quad (rr'^{-1} + \sqrt{-1})r',$$

oder $$q'(q'' + \sqrt{-1}) \quad \text{und} \quad (r'' + \sqrt{-1})r',$$

und zeigt, dass $q'' = -r'' = \alpha$, wo $T\alpha = 1$.]

Hieraus folgt, dass, wenn das Product zweier *Bivectoren*

$$\varrho + \sigma\sqrt{-1} \quad \text{und} \quad \varrho' + \sigma'\sqrt{-1}$$

verschwindet, man haben muss:

$$\sigma^{-1}\varrho = -\varrho'\sigma'^{-1} = U\alpha,$$

wo α ein beliebiger Vector sein mag. Man gelangt leichter zu diesem Resultat durch ein direktes Verfahren.

126.) Wir bemerken hier, und wir werden von dieser Bemerkung in den folgenden Kapiteln Gebrauch machen, dass man gewisse abgekürzte Schreibweisen gebrauchen kann, wenn sie leicht verständlich sind und keine Irrthümer veranlassen können. So kann man schreiben:

$$T^2q \quad \text{statt} \quad (Tq)^2,$$

gerade wie wir schreiben:

$$\cos^2\vartheta \quad \text{statt} \quad (\cos\vartheta)^2,$$

obwohl die eigentliche Bedeutung dieser Ausdrücke ist:

$$T(Tq) \quad \text{und} \quad \cos(\cos\vartheta).$$

Der erste Ausdruck lässt sich rechtfertigen, da $T(Tq) = Tq$, und wir das Zeichen T^2q nicht nöthig haben, um den zweiten Tensor (oder Tensor des Tensors) von q zu bezeichnen. Doch ist die in der Trigonometrie übliche Bezeichnung nicht zu rechtfertigen.

Dem entsprechend kann man schreiben:

$$S^2q \quad \text{statt} \quad (Sq)^2, \quad \text{u. s. w.}$$

Doch ist es nicht rathsam zu schreiben

$$Sq^2$$

als gleichbedeutend mit den obigen Bezeichnungen; denn man könnte es verwechseln mit dem im allgemeinen verschiedenen Ausdruck:

$$S.q^2 \quad \text{oder} \quad S(q)^2,$$

obgleich dies selten ohne den Punkt oder die Klammern geschrieben wird.

127.) Der Anfänger mag etwas in Verlegenheit gerathen durch diese verschiedenen Bezeichnungsweisen; doch wird er bald den Unterschied sehen lernen zwischen einem Ausdruck wie

$$S.V\alpha\beta\,V\beta\gamma,$$

wo wir nach Belieben den Punkt oder das erste V weglassen können, ohne dessen Werth zu ändern, und dem grundverschiedenen Ausdruck:

$$S\alpha\beta.V\beta\gamma,$$

wo keine solche Veränderung zulässig ist.

Alle diese vereinfachten Schreibweisen sind in Wirklichkeit Beispiele von Umformungen von Quaternionenausdrücken, wie diejenigen, denen wir einen Theil dieses Kapitels gewidmet haben. Wir nehmen ein sehr einfaches Beispiel. Man sieht leicht, dass

$$\begin{aligned} S.V\alpha\beta\,V\beta\gamma &= SV\alpha\beta\,V\beta\gamma = S.\alpha\beta\,V\beta\gamma = S\alpha\,V.\beta\,V\beta\gamma \\ &= -S\alpha\,V.(V\beta\gamma)\beta = S\alpha\,V.(V\gamma\beta)\beta = S.\alpha\,V(\gamma\beta)\beta \\ &= S.V(\gamma\beta)\beta\alpha = SV\gamma\beta\,V\beta\alpha = S.\gamma\beta\,V\beta\alpha = \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Diese Reihe erschöpft noch lange nicht die Liste selbst der einfachsten Ausdrücke für dieselbe Grösse. Wir empfehlen dem Leser

dieselbe zu einem sorgfältigen Studium. Im Anfange ist es rathsam, einen häufigen Gebrauch von Punkten und Klammern zu machen; allmählig wird man lernen, diejenigen wegzulassen, die nicht unumgänglich nöthig sind.

Uebungsbeispiele zu Kapitel III.

1. Man untersuche mit Hilfe von Quaternionen die Formeln, um von einem beliebigen System von Coordinatenachsen zu einem andern überzugehen; aus dem allgemeinen Resultate und ebenfalls aus den Special-Untersuchungen soll man die gewöhnlichen Formeln ableiten für folgende Fälle

(*a*) Rechtwinklige Achsen um z um einen beliebigen Winkel gedreht.

(*b*) Rechtwinklige Achsen in eine beliebige andere Lage gebracht durch Drehung um eine Gerade, die gegen die drei Achsen gleichviel geneigt ist.

(*c*) Rechtwinklige Achsen mit schiefwinkligen vertauscht, von denen je eine Achse in je einer der frühern Coordinatenebenen liegt.

2. Es sei $T\varrho = T\alpha = T\beta = 1$ und $S.\alpha\beta\varrho = 0$. Man zeige durch direkte Transformation, dass

$$S.U(\varrho-\alpha)U(\varrho-\beta) = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(-S\alpha\beta)}.$$

Man deute dies Resultat geometrisch.

3. Es sei $S\alpha\beta = 0$, $T\alpha = T\beta = 1$. Man soll nachweisen, dass

$$(1+\alpha^m)\beta = 2\cos\frac{m\pi}{4}\alpha^{\frac{m}{2}}\beta = 2S\alpha^{\frac{m}{2}}.\alpha^{\frac{m}{2}}\beta.$$

4. Man bringe folgende Gleichung auf die einfachste Form:

$$\varrho S.V\alpha\beta V\beta\gamma V\gamma\alpha = aV.V\gamma\alpha V\alpha\beta + bV.V\alpha\beta V\beta\gamma + cV.V\beta\gamma V\gamma\alpha.$$

Man zeige weiter, dass

$$a = S.\beta\gamma\varrho \quad \text{u. s. w.}$$

5. Man beweise folgende Sätze und stelle sie dar als Eigenschaften von Determinanten:

(*a*) $S.(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) = 2S.\alpha\beta\gamma$,

(*b*) $S.V\alpha\beta V\beta\gamma V\gamma\alpha = -(S.\alpha\beta\gamma)^2$,

(*c*) $S.V(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)V(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)V(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta) = -4(S.\alpha\beta\gamma)^2$,

(*d*) $S.V(V\alpha\beta V\beta\gamma)V(V\beta\gamma V\gamma\alpha)V(V\gamma\alpha V\alpha\beta) = -(S.\alpha\beta\gamma)^4$,

(*e*) $S.\delta\varepsilon\xi = -16(S.\alpha\beta\gamma)^4$, wo

$$\delta = V(V(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)V(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)),$$
$$\varepsilon = V(V(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)V(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)),$$
$$\xi = V(V(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)V(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)).$$

6. Man beweise die gewöhnliche Formel zur Multiplication zweier Determinanten dritter Ordnung, in der Form:

$$S.\alpha\beta\gamma\, S.\alpha_1\beta_1\gamma_1 = -\begin{vmatrix} S\alpha\alpha_1 & S\beta\alpha_1 & S\gamma\alpha_1 \\ S\alpha\beta_1 & S\beta\beta_1 & S\gamma\beta_1 \\ S\alpha\gamma_1 & S\beta\gamma_1 & S\gamma\gamma_1 \end{vmatrix}.$$

7. Sind in § 102 α, β, γ drei aufeinander senkrecht stehende Vectoren, kann man dann irgend etwas voraussagen über die Eigenschaften von $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$? Sind α, β, γ aufeinander senkrecht stehende *Einheits*-Vectoren, was sind α_1, β_1, γ_1?

8. α, β, γ, α', β', γ' seien zwei Systeme von aufeinander senkrecht stehenden Einheits-Vectoren. Man zeige, dass

$$S\alpha\alpha' = S\gamma\beta' S\beta\gamma' - S\beta\beta' S\gamma\gamma' \quad \text{u. s. w.}$$

9. Die Geraden, welche die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Seiten eines Vierecks verbinden, stehen senkrecht aufeinander, wenn die Diagonalen des Vierecks einander gleich sind.

10. Man zeige, dass

(*a*) $S.q^2 = 2S^2q - T^2q$,

(*b*) $S.q^3 = S^3q - 3SqT^2Vq$,

(*c*) $\alpha^2\beta^2\gamma^2 + S^2.\alpha\beta\gamma = V^2.\alpha\beta\gamma$,

(*d*) $S(V.\alpha\beta\gamma\, V.\beta\gamma\alpha\, V.\gamma\alpha\beta) = 4S\alpha\beta S\beta\gamma S\gamma\alpha S.\alpha\beta\gamma$,

(*e*) $V.q^3 = (3S^2q - T^2Vq)Vq$,

(*f*) $qUVq^{-1} = -Sq.UVq + TVq$;

und deute jeden dieser Ausdrücke als Formel der ebenen oder sphärischen Trigonometrie.

11. Wenn q eine unbestimmte Quaternion ist, welche geometrische Oerter werden dann bestimmt durch

(*a*) $(q\alpha^{-1})^2 = -a^2$,

(*b*) $(q\alpha^{-1})^4 = a^4$,

(*c*) $S.(q-\alpha)^2 = a^2$,

wo a eine gegebene Scalar, α ein gegebener Vector ist.

12. q sei eine beliebige Quaternion; man soll nachweisen, dass der Gleichung

$$Q^2 = q^2$$

genügt wird nicht allein durch

$$Q = \pm q,$$

sondern auch durch

$$Q = \pm\sqrt{-1}(Sq.UVq - TVq)$$

(Hamilton, Lectures, p. 673).

13. Wodurch unterscheiden sich die beiden Gleichungen

$$T^2\frac{\varrho}{\alpha} = 1 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\varrho}{\alpha}\right)^2 = -1?$$

Welches ist die volle Bedeutung einer jeden, wenn α ein gegebener, ϱ ein unbestimmter Vector ist?

14. Man entwickele die volle Bedeutung einer jeden der folgenden Gruppen von Gleichungen, sowohl was den unbekannten Vector ϱ, als die gegebenen Vectoren α, β, γ betrifft.

(*a*) $S\cdot\alpha\beta\varrho = 0$, $S.\beta\gamma\varrho = 0$;

(*b*) $S\alpha\varrho = 0$, $S.\alpha\beta\varrho = 0$, $S\beta\varrho = 0$;

(*c*) $S\alpha\varrho = 0$, $S.\alpha\beta\varrho = 0$, $S.\alpha\beta\gamma\varrho = 0$.

15. Aus §§ 74, 109 zeige man, dass, wenn ε ein beliebiger Einheits-Vector ist, und m eine beliebige Scalar, dass dann

$$\varepsilon^m = \cos\frac{m\pi}{2} + \varepsilon\sin\frac{m\pi}{2}.$$

α, β, γ seien Halbmesser, die nach den Eckpunkten eines Dreiecks auf der Einheitssphäre führen, und der sphärische Excess dieses Dreiecks sei m Rechte, dann soll man mit Hilfe des obigen Ausdruckes nachweisen, dass

$$\frac{\alpha+\beta}{\beta+\gamma}\cdot\frac{\gamma+\alpha}{\alpha+\beta}\cdot\frac{\beta+\gamma}{\gamma+\alpha} = \alpha^m.$$

Weiter, wenn A, B, C die Winkel des Dreiecks sind, so ist:

$$\gamma^{\frac{2C}{\pi}}\ \beta^{\frac{2B}{\pi}}\ \alpha^{\frac{2A}{\pi}} = -1.$$

16. Man zeige, dass für beliebige drei Vectoren α, β, γ stets:
$(U\alpha\beta)^2+(U\beta\gamma)^2+(U\alpha\gamma)^2+(U.\alpha\beta\gamma)^2+4\,U\alpha\gamma\,.\,SU\alpha\beta\,.\,SU\beta\gamma = -2$
(Hamilton, Elements p. 388).

17. a_1, a_2, a_3, x seien vier beliebige Scalaren, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 drei beliebige Vectoren; man zeige, dass

$$\begin{aligned}&(S.\varrho_1\varrho_2\varrho_3)^2 + (\Sigma.a_1V\varrho_2\varrho_3)^2 + x^2(\Sigma V\varrho_1\varrho_2)^2\\ &- x^2(\Sigma.a_1(\varrho_2-\varrho_3))^2 + 2\Pi(x^2+S\varrho_1\varrho_2+a_1a_2)\\ &= 2\Pi(x^2+\varrho^2)+2\Pi a^2+\Sigma\{(x^2+a_1{}^2+\varrho_1{}^2)((V\varrho_2\varrho_3)^2\\ &\qquad + 2a_2a_3(x^2+S\varrho_2\varrho_3) - x^2(\varrho_2\varrho_3)^2)\};\end{aligned}$$

wo $\Pi a^2 = a_1{}^2a_2{}^2a_3{}^2$.

Man weise die Richtigkeit dieser Formel in dem speciellen Falle nach:

$$a_1 = a_2 = a_3 = x = 0. \qquad \text{(Ibid.)}$$

Kapitel IV.

Differentiation der Quaternionen.

128.) In Kapitel I. haben wir schon einen speciellen Fall betrachtet, nämlich die Differentiation einer *Vectorfunction* von einer Scalar- unabhängigen Variabeln. Man sieht leicht, dass ein entsprechendes Verfahren anwendbar ist auf eine *Quaternionenfunction* von einer Scalar- unabhängigen Veränderlichen. Das so gewonnene Differential, oder der Differentialquotient, ist im allgemeinen eine neue Function derselben Scalarvariabeln, und kann deshalb aufs neue differentiirt werden durch eine zweite, dritte u. s. w. Anwendung desselben Verfahrens. Dieselben Bemerkungen finden ihre Anwendung auf die partielle Differentiation einer Quaternionenfunction von einer beliebigen Anzahl von Scalarvariabeln. In der That ist dies Verfahren identisch mit der gewöhnlichen Differentiation.

129.) Sollen wir aber die Function eines Vectors oder einer Quaternion differentiiren, so ist einige Vorsicht nöthig. Im allgemeinen ist hier nichts, was man einen Differentialquotienten nennen könnte, und wir sind in der That genöthigt (wie wir schon in § 33 andeuteten), eine Definition des Differentials anzuwenden, die von der gewöhnlichen etwas abweicht, mit derselben aber zusammenfällt, wenn man sie auf Functionen von Scalarvariabeln anwendet.

130.) $r = F(q)$ sei eine Function einer Quaternion q, n eine Scalar, die unendlich gross wird, dann *definiren* wir das Differential von r oder Fq durch den Ausdruck:

$$dr = dFq = L_\infty n\left\{F\left(q + \frac{dq}{n}\right) - F(q)\right\};$$

dq ist hier eine *beliebige Quaternion*, und das Glied auf der rechten Seite kann geschrieben werden

$$f(q, dq),$$

wo f eine neue Function ist, die von der Gestalt von F abhängt. f ist homogen und vom *ersten* Grade in Bezug auf dq; im allgemeinen kann man aber $f(q, dq)$ *nicht* auf die Form bringen

$$\mathrm{f}(q)dq.$$

131.) Um diese Bemerkungen noch deutlicher zu machen, wollen wir bemerken, dass die Function

$$f(q, dq),$$

die auf diese Weise erhalten wird als das Differential von $F(q)$, in Bezug auf dq *distributiv* ist. Das heisst:

$$f(q, r+s) = f(q, r) + f(q, s),$$

wo r und s beliebige Quaternionen sind.

Denn: $$f(q, r+s) = L_\infty n\left\{F\left(q + \frac{r+s}{n}\right) - F(q)\right\}$$

$$= L_\infty n\left\{F\left(q + \frac{r}{n} + \frac{s}{n}\right) - F\left(q + \frac{s}{n}\right) + F\left(q + \frac{s}{n}\right) - F(q)\right\}$$

$$= L_\infty n\left\{F\left(q + \frac{s}{n} + \frac{r}{n}\right) - F\left(q + \frac{s}{n}\right)\right\} + L_\infty n\left\{F\left(q + \frac{s}{n}\right) - F(q)\right\}$$

$$= f(q, r) + f(q, s).$$

In dem speciellen Falle, wo x eine Scalar, folgt leicht

$$f(q, xr) = xf(q, r).$$

132.) Wir definiren auf dieselbe Weise

$$dF(q, r, s \ldots)$$

als den Werth von

$$L_\infty n\left\{F\left(q + \frac{dq}{n}, r + \frac{dr}{n}, s + \frac{ds}{n}, \ldots\right) - F(q, r, s)\right\},$$

wo $q, r, s \ldots, dq, dr, ds \ldots$ irgend welche Quaternionen bedeuten. Wir erhalten ein Resultat, das wir schreiben können:

$$f(q, r, s \ldots dq, dr, ds \ldots),$$

wo f eine homogene, lineare Function der Quaternionen $dq, dr, ds \ldots$ und in Bezug auf jede derselben distributiv ist.

Hat man also ein Product oder eine Potenz einer oder mehrerer Quaternionen zu differentiiren, so muss jeder Factor differentiirt werden als sei er allein veränderlich, und die einzeln so erhaltenen Glieder sind dann zu addiren, um das volllständige Differential zu erhalten. Dies unterscheidet sich von der gewöhnlichen Differentiation nur dadurch, dass, weil die Quaternionenmultiplication nicht commutativ ist, jeder Factor im allgemeinen *in situ* differentiirt werden muss.

So hat man:

$$d(qr) = dq.r + qdr,$$

aber nicht allgemein:

$$= rdq + qdr.$$

133.) Wir wählen solche Beispiele, deren Ergebnisse wir in den folgenden Kapiteln beständig gebrauchen werden.

Einen Theil der Rechnungen werden wir vollständig durchführen als Uebung in der Umformung von Quaternionenausdrücken.

(1) $$(T\varrho)^2 = -\varrho^2.$$

Auf der linken Seite erhalten wir, da $T\varrho$ eine Scalar:

$$2T\varrho\, dT\varrho.$$

Das Differential von ϱ^2 ist

$$L_\infty n\left(\left(\varrho + \frac{d\varrho}{n}\right)^2 - \varrho^2\right)$$
$$= L_\infty n\left(\frac{2}{n} S\varrho d\varrho + \frac{(d\varrho)^2}{n^2}\right) \text{ (§ 104)}$$
$$= 2S\varrho d\varrho.$$

Also $$T\varrho\, dT\varrho = -S\varrho d\varrho,$$

oder $$dT\varrho = -S.U\varrho\, d\varrho = S\frac{d\varrho}{U\varrho},$$

oder $$\frac{dT\varrho}{T\varrho} = S\frac{d\varrho}{\varrho}.$$

(2) Weiter: $$\varrho = T\varrho\, U\varrho$$
$$d\varrho = dT\varrho.U\varrho + T\varrho\, dU\varrho,$$
$$\frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{dT\varrho}{T\varrho} + \frac{dU\varrho}{U\varrho}$$
$$= S\frac{d\varrho}{\varrho} + \frac{dU\varrho}{U\varrho} \quad \text{nach (1).}$$

Hieraus: $$\frac{dU\varrho}{U\varrho} = V\frac{d\varrho}{\varrho},$$

und dies kann umgeformt werden in

$$V\frac{d\varrho.\varrho}{\varrho^2} \quad \text{oder} \quad \frac{V\varrho\, d\varrho}{T\varrho^2} \quad \text{u. s. w.}$$

(3) $$(Tq)^2 = qKq$$
$$2Tq\, dTq = d(qKq)$$
$$= L_\infty n\left[\left(q + \frac{dq}{n}\right)K\left(q + \frac{dq}{n}\right) - qKq\right]$$
$$= L_\infty n\left(\frac{qKdq + dqKq}{n} + \frac{1}{n^2} dqKdq\right),$$
$$= qKdq + dqKq,$$
$$= qKdq + K(qKdq) \quad (\S\ 55),$$
$$= 2S.qKdq = 2S.Kqdq.$$

Hieraus $$dTq = S.UKqdq = S.Uq^{-1}dq,$$

da $$Tq = TKq \quad \text{und} \quad UKq = Uq^{-1}.$$

Ist $q = \varrho$, ein Vector, $Kq = K\varrho = -\varrho$ und die Formel wird

$$dT\varrho = -S.U\varrho d\varrho \quad \text{wie in (1).}$$

Weiter: $$\frac{dTq}{Tq} = S\frac{dq}{q};$$

aber $$dq = Tq\,dUq + Uq\,dTq,$$

hieraus: $$\frac{dq}{q} = \frac{dTq}{dq} + \frac{dUq}{Uq};$$

da $$S\frac{dq}{q} = \frac{dTq}{Tq},$$

so folgt: $$V\frac{dq}{q} = \frac{dUq}{Uq}.$$

(4) $$\begin{aligned} d(q^2) &= L_\infty n\left(\left(q + \frac{dq}{n}\right)^2 - q^2\right) \\ &= qdq + dq.q \\ &= 2S.qdq + 2Sq.Vdq + 2Sdq.Vq. \end{aligned}$$

Ist q ein Vector, ϱ z. B, so verschwinden Sq und Sdq, und man hat

$$d(\varrho^2) = 2S\varrho d\varrho$$ wie in (1).

(5) Es sei $$q = r^{\frac{1}{2}}.$$

Dies liefert $$dr^{\frac{1}{2}} = dq.$$

Aber $$dr = d(q^2) = qdq + dq.q.$$

Multiplicirt durch q und *in* Kq, gibt dies

$$qdr = q^2dq + qdq.q$$

und $$drKq = dq.Tq^2 + qdq.Kq;$$

durch Addition $qdr + dr.Kq = (q^2 + Tq^2 + 2Sq.q)dq;$

hieraus kann man dq, d. h. $dr^{\frac{1}{2}}$, ausdrücken durch dr. Dies Verfahren gibt Hamilton, Lectures p. 628.

(6) $$qq^{-1} = 1$$

$$qdq^{-1} + dq.q^{-1} = 0;$$

$$dq^{-1} = -q^{-1}dq.q^{-1}.$$

Es sei q ein Vector $= \varrho$

$$\begin{aligned} dq^{-1} = d\varrho^{-1} &= -\varrho^{-1}d\varrho.\varrho^{-1} \\ &= \frac{d\varrho}{\varrho^2} - \frac{2}{\varrho}S\frac{d\varrho}{\varrho} \\ &= \left(\frac{d\varrho}{\varrho} - 2S\frac{d\varrho}{\varrho}\right)\frac{1}{\varrho} \\ &= -K\left(\frac{d\varrho}{\varrho}\right)\frac{1}{\varrho}. \end{aligned}$$

(7) $$q = Sq + Vq$$

$$dq = dSq + dVq$$

Aber $$dq = Sdq + Vdq.$$

Vergleicht man diese Ausdrücke, so folgt:

$$dSq = Sdq, \qquad dVq = Vdq.$$

Da $Kq = Sq - Vq$, so findet man auf ähnliche Weise:

$$dKq = Kdq.$$

134.) Mehrfache Differentiation bietet natürlich keine neuen Schwierigkeiten dar.

So hatten wir:

$$d(q^2) = dq\,.\,q + qdq.$$

Differentiiren wir noch einmal, so folgt:

$$d^2(q^2) = d^2q\,.\,q + 2(dq)^2 + qd^2q,$$

u. s. w. für höhere Ordnungen.

Ist q ein Vector $= \varrho$, so haben wir § 133 (1):

$$d(\varrho^2) = 2S\varrho d\varrho\,.$$

Hieraus: $$d^2(\varrho^2) = 2(d\varrho)^2 + 2S\varrho d^2\varrho \quad \text{u. s. w.;}$$

dem entsprechend: $$d^2 U\varrho = -d\left(\frac{U\varrho}{T\varrho^2} V\varrho d\varrho\right).$$

Nun ist: $$d\frac{1}{T\varrho^2} = -\frac{2dT\varrho}{T\varrho^3} = \frac{2S\varrho d\varrho}{T\varrho^4}$$

und $$d\,.\,V\varrho d\varrho = V\,.\,\varrho d^2\varrho.$$

Also: $$-d^2U\varrho = -\frac{U\varrho}{T\varrho^4}(V\varrho d\varrho)^2 + \frac{U\varrho V\varrho d^2\varrho}{T\varrho^2} + \frac{2U\varrho V\varrho d\varrho S\varrho d\varrho}{T\varrho^4}$$

$$= -\frac{U\varrho}{T\varrho^4}((V\varrho d\varrho)^2 + \varrho^2 V\varrho d^2\varrho - 2V\varrho d\varrho S\varrho d\varrho).^*)$$

135.) Betrachtet man das erste Differential von q als eine constante Quaternion, so haben wir natürlich

$$d^2q = 0, \qquad d^3q = 0 \quad \text{u. s. w.,}$$

und obige Formeln werden dadurch sehr vereinfacht.

Hamilton hat gezeigt, dass man in diesem Falle den Taylorschen Satz leicht auf Quaternionen ausdehnen kann. Das heisst, man kann schreiben:

$$f(q + xdq) = f(q) + xdf(q) + \frac{x^2}{1\,.\,2} d^2f(q) + \ldots$$

wenn $d^2q = 0$; es gelten natürlich auch hier gewisse Ausnahmen und Beschränkungen, wie bei der Anwendung auf Functionen von Scalarvariabeln.

So sei $$f(q) = q^3,$$

$$df(q) = q^2dq + qdq\,.\,q + dqq^2,$$

$$d^2f(q) = 2dq\,.\,qdq + 2q(dq)^2 + 2(dq)^2q,$$

$$d^3f(q) = 6(dq)^3.$$

---

*) Man kann dies noch weiter vereinfachen; wir müssen aber den Leser darauf aufmerksam machen, dass man obigen Ausdruck nicht schreiben darf:

$$-\frac{U\varrho}{T\varrho^4} V\,.\,\varrho\{d\varrho V\varrho d\varrho + d^2\varrho\varrho^2 - 2d\varrho\varrho d\varrho\}.$$

Man kann dann leicht durch Multiplication nachweisen, dass folgende Formel, die man durch Anwendung des Taylor'schen Satzes erhält, in aller Strenge richtig ist:

$$(q + xdq)^3 = q^3 + x(q^2 dq + q dq . q + dq . q^2) + x^2(dq . q dq + q(dq)^2 + (dq)^2 q) + x^3 (dq)^3 .$$

Da wir nicht in die Lage kommen werden, jenen Satz anzuwenden und alle bis jetzt gefundenen Beweise desselben für ein elementares Handbuch zu weitläufig sind, so verweisen wir den Leser auf Hamilton's Werke, in denen er mehrere finden wird.

136.) Um eine Function einer Function von Quaternionen zu differentiiren, verfährt man wie mit Scalarvariabeln, hat aber die Eigenthümlichkeiten zu beachten, auf welche wir aufmerksam gemacht haben.

137.) Ein Fall von grosser Wichtigkeit in den geometrischen Anwendungen von Quaternionen ist die Differentiation einer Scalarfunction von ϱ, wo ϱ der Vector irgend eines Punktes im Raume ist.

Es sei $$F(\varrho) = C,$$

wo F eine Scalarfunction, C eine willkürliche Constante bedeutet, sei die Gleichung einer Reihe von Flächen.

Das Differential derselben

$$f(\varrho, d\varrho) = 0$$

ist natürlich eine Scalarfunction; da dieselbe homogen und linear in Bezug auf $d\varrho$ ist (§ 130), so kann man sie schreiben:

$$S\nu d\varrho = 0,$$

ν ist ein Vector, im allgemeinen eine Function von ϱ.

Man sieht leicht, dass dieser Vector die Richtung der *Normalen* der gegebenen Fläche im Endpunkte von ϱ hat, da er senkrecht steht auf jeder Tangente $(d\varrho)$ der Fläche in ϱ, §§ 36, 98. Ist die Fläche zweiten Grades und liegt der Anfangspunkt im Mittelpunkte derselben, so ist die Länge jenes Vectors gleich der Reciproken der Entfernung der Tangentialebene vom Anfangspunkte.

Später werden wir nachweisen, dass, wenn

$$\varrho = ix + jy + kz,$$

wir haben $$\nu = \left(i\frac{d}{dx} + j\frac{d}{dy} + k\frac{d}{dz}\right) F(\varrho).$$

Uebungsbeispiele zu Kapitel IV.

1. Man zeige, dass

$$(a) \qquad d.SUq = S.UqV\frac{dq}{q} = -S\frac{dq}{qUVq}TVUq,$$

$$(b) \qquad d.VUq = V.Uq^{-1}V(dq.q^{-1}),$$

$$(c) \qquad d.TVUq = S\frac{dUq}{UVq} = S\frac{dq}{qUVq}SUq,$$

$$(d) \qquad d.\alpha^x = \frac{\pi}{2}\alpha^{x+1}dx,$$

$$(e) \quad d^2.Tq = \{S^2.dqq^{-1} - S.(dqq^{-1})^2\}Tq = -TqV^2\frac{dq}{q}.$$

2. Es sei $\qquad F\varrho = \Sigma.S\alpha\varrho S\beta\varrho + \frac{1}{2}g\varrho^2$

$$dF\varrho = S\nu d\varrho.$$

Man zeige, dass

$$V = \Sigma V.\alpha\varrho\beta + (g + \Sigma S\alpha\beta)\varrho.$$

3. Das Maximum und Minimum von $T\varrho$ zu finden, wenn

$$(a) \quad (\varrho - \alpha)^2 = -a^2.$$

$$(b) \quad (\varrho - a)^2 = -a^2,$$
$$S\beta\varrho = 0.$$

$$(c) \quad \varrho^2 - S\alpha\varrho\, S\beta\varrho = -a^2.$$

$$(d) \quad \varrho^2 - S\alpha\varrho\, S\beta\varrho = -a^2,$$
$$S\gamma\varrho = 0.$$

Zu zeigen, wodurch (a), (c) auf der einen und (b), (d) auf der andern Seite sich unterscheiden.

Man gebe die geometrische Deutung einer jeden Aufgabe (vgl. Kapitel VII, VIII).

Kapitel V.

Die Lösung der Gleichungen ersten Grades.

138.) Wir sahen, dass die Differentiation einer jeden Quaternionenfunction zu einer Gleichung folgender Form führt:

$$dr = f(q, dq),$$

wo f eine lineare homogene Function in dq ist. Um das Verfahren der Differentiation zu vervollständigen, müssen wir die Mittel haben, diese Gleichung zu lösen, um den Werth von dq direkt angeben zu können.

Diese allgemeine Gleichung hat nicht denselben praktischen Werth wie der specielle Fall, wo dq ein Vector ist. Wir werden übrigens gleich nachweisen, dass man die Lösung der allgemeinen Gleichung aus diesem speciellen Falle herleiten kann; wir werden deshalb mit letzterem beginnen.

Man sieht leicht, dass der allgemeinste Ausdruck der Function f ist:

$$dr = f(q, dq) = \Sigma V.adqb + S.cdq,$$

wo a, b, c, beliebige Quaternionenfunctionen von q sind. Jedes mögliche Glied einer in dq linearen und homogenen Function lässt sich auf diese Form bringen, wie man sich leicht überzeugt, indem man jede denkbare Form niederschreibt.

Nehmen wir die Scalaren auf jeder Seite, so folgt:

$$Sdr = S.cdq = SdqSc + S.VdqVc.$$

Nimmt man aber die Vectoren:

$$Vdr = \Sigma V.adqb = Sdq.\Sigma Vab + \Sigma V.a(Vdq)b.$$

Eliminirt man Sdq zwischen den Gleichungen für Sdr und Vdr, so bleibt eine lineare Vectorgleichung in Vdq. Ein solcher Ausdruck, insofern er Vdq enthält, kann immer zurückgeführt werden auf eine Summe von Gliedern der Form $\alpha S.\beta Vdq$ mit Hilfe von Formeln wie in §§ 90, 91. Löst man diese Gleichung, so hat man Vdq, und Sdq erhält man aus der vorigen Gleichung.

139.) Wir können die Aufgabe jetzt so aussprechen:

Man finde den Werth von ϱ aus der Gleichung:

$$\alpha S\beta\varrho + \alpha_1 S\beta_1\varrho + - \ldots = \Sigma . \alpha S\beta\varrho = \gamma ,$$

wo α, β, α_1, β_1, $\ldots$ γ gegebene Vectoren sind.

[Wir werden später zeigen, dass der allgemeinste Ausdruck nur drei Glieder zu enthalten braucht, d. h. sechs Vectorconstanten α, β, α_1, β_1, α_2, β_2, im Ganzen.]

Schreiben wir mit Hamilton:

$$\varphi\varrho = \Sigma . \alpha S\beta\varrho ,$$

so nimmt die gegebene Gleichung die Form an:

$$\varphi\varrho = \gamma ,$$

oder

$$\varrho = \varphi^{-1}\gamma ,$$

und der Gegenstand unsrer Untersuchung ist, den Werth der reciproken Function φ^{-1} aufzusuchen.

140.) Wir sahen, dass jeder Vector ausgedrückt werden kann durch drei beliebige nichtcomplanare Vectoren. Wir können deshalb schon *a priori* erwarten, dass ein Vector, wie z. B. $\varphi\varphi\varphi\varrho$ oder $\varphi^3\varrho$, ausdrückbar ist durch ϱ, $\varphi\varrho$ und $\varphi^2\varrho$. [Dies setzt natürlich voraus, dass ϱ, $\varphi\varrho$ und $\varphi^2\varrho$ im allgemeinen nicht complanar sind. Man kann aber nachweisen, dass selbst dieser Fall zulässig ist. Denn, sind diese Vectoren im allgemeinen complanar, so sind es auch $\varphi\varrho$, $\varphi^2\varrho$ und $\varphi^3\varrho$, da man sie schreiben kann σ, $\varphi\sigma$ und $\varphi^2\sigma$, und $\varphi^3\varrho$ kann also ausgedrückt werden wie oben.

Sollte man in einem speciellen Falle für einen *bestimmten* Vector ϱ haben: $\varphi(\varrho) = g\varrho$, wo g eine Scalar ist, so folgt: $\varphi^2\varrho = g^2\varrho$ und $\varphi^3\varrho = g^3\varrho$, und auch hier bleibt die Gleichung gültig.

Eine ähnliche Betrachtung kann man anstellen in dem speciellen Falle, wenn für einen *bestimmten* Werth von ϱ die drei Vectoren ϱ, $\varphi\varrho$, $\varphi^2\varrho$ complanar sind.

Wir haben dann nämlich.:

$$\varphi^2\varrho = A\varrho + B\varphi\varrho ;$$

hieraus

$$\varphi^3\varrho = A\varphi\varrho + B\varphi^2\varrho$$
$$= AB\varrho + (A + B^2)\varphi\varrho .$$

$\varphi^3\varrho$ liegt demnach in derselben Ebene.]

Schreiben wir also:

$$-\varphi^3\varrho = x\varrho + y\varphi\varrho + z\varphi^2\varrho \ldots\ldots\ldots (1)$$

so sind x, y, z Grössen, die nicht von dem Vector ϱ abhängen, und wir können sie bestimmen durch ein ähnliches Verfahren wie in §§ 91, 92.

Setzt man an die Stelle von ϱ drei beliebige Vectoren i, j, k, so wird es im allgemeinen möglich sein, die Werthe der drei Coefficienten x, y, z zu bestimmen, und die Lösung ist eine vollständige. Denn setzt man $\varphi^{-1}\varrho$ an die Stelle von ϱ und ordnet die Glieder, so folgt:

$$-x\varphi^{-1}\varrho = y\varrho + z\varphi\varrho + \varphi^2\varrho;$$

d. h. die unbekannte reciproke Function ist ausgedrückt durch direkte Operationen.

Verschwindet x, während y endlich bleibt, so setzen wir $\varphi^{-2}\varrho$ an Stelle von ϱ und erhalten:

$$-y\varphi^{-1}\varrho = z\varrho + \varphi\varrho,$$

und verschwinden x und y:

$$-z\varphi^{-1}\varrho = \varrho.$$

141.) Um dies Verfahren an einem Beispiel zu erläutern, wählen wir den überaus wichtigen Fall, wo φ einer Mittelpunktfläche zweiten Grades angehört; nehmen wir an, die Fläche sei ein Ellipsoïd; wir werden in Kapitel VII sehen, dass man dann schreiben kann:

$$\varphi\varrho = -a^2 iSi\varrho - b^2 jSj\varrho - c^2 kSk\varrho.$$

Hier haben wir:

$$\begin{aligned} \varphi i &= a^2 i, & \varphi^2 i &= a^4 i, & \varphi^3 i &= a^6 i, \\ \varphi j &= b^2 j, & \varphi^2 j &= b^4 j, & \varphi^3 j &= b^6 j, \\ \varphi k &= c^2 k, & \varphi^2 k &= c^4 k, & \varphi^3 k &= c^6 k. \end{aligned}$$

Setzen wir nun nach einander i, j, k an Stelle von ϱ in Gleichung (1) des vorigen Paragraphen, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} -a^6 &= x + ya^2 + za^4, \\ -b^6 &= x + yb^2 + zb^4, \\ -c^6 &= x + yc^2 + zc^4. \end{aligned}$$

a^2, b^2, c^2 sind also die Wurzeln der cubischen Gleichung:

$$\xi^3 + z\xi^2 + y\xi + x = 0.$$

Demnach muss sein:

$$\begin{aligned} z &= -(a^2 + b^2 + c^2), \\ y &= a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2, \\ x &= -a^2b^2c^2. \end{aligned}$$

Wir erhalten also in diesem Falle:

$$\varphi^3\varrho = a^2b^2c^2\varrho - (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)\varphi\varrho + (a^2 + b^2 + c^2)\varphi^2\varrho.$$

142.) Setzen $\varphi^{-1}\sigma$ wir an Stelle von ϱ (ein beliebiger Vector), und ordnen die Glieder, so erhalten wir die gesuchte reciproke Function in der Form:

$$a^2b^2c^2\varphi^{-1}\sigma = (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)\sigma - (a^2 + b^2 + c^2)\varphi\sigma + \varphi^2\sigma,$$

also ausgedrückt durch direkte Operationen.

In diesem speciellen Falle ist die Lösung, die wir gegeben haben, vollständig und befriedigend, und hat den Vortheil, den Leser darauf vorzubereiten, eine ähnliche Form der Lösung in verwickelteren Fällen zu erwarten.

143.) Es mag von Nutzen sein, als Vorbereitung auf das Folgende, die Gleichung des § 141 auf die Form zu bringen:

$$\begin{aligned} 0 = \Phi\varrho &= \varphi^3\varrho - (a^2+b^2+c^2)\varphi^2\varrho + (a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\varphi\varrho - a^2b^2c^2\varrho \\ &= \{\varphi^3 - (a^2+b^2+c^2)\varphi^2 + (a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\varphi - a^2b^2c^2\}\varrho \\ &= \{(\varphi - a^2)(\varphi - b^2)(\varphi - c^2)\}\varrho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{aligned}$$

Diese letzte Umformung ist zulässig, da φ mit Scalaren wie a^2 *commutativ* ist, d. h. $\varphi(a^2\varrho) = a^2\varphi\varrho$.

Wir machen darauf aufmerksam, dass der Gleichung

$$V.\varrho\varphi\varrho = 0 \quad \text{oder} \quad \varphi\varrho = g\varrho,$$

wo g eine unbestimmte Scalar ist, genügt wird nicht nur durch jeden Vector der Länge Null, sondern auch durch das bestimmte System von drei rechtwinkligen Vectoren Ai, Bj, Ck, welches auch deren Tensoren seien; die entsprechenden Werthe von g sind a^2, b^2, c^2.

144.) Wir geben jetzt Hamilton's bewundernswerthe Untersuchung.

Die allgemeinste Form einer linearen Vectorfunction eines Vectors kann geschrieben werden:

$$\varphi\varrho = \Sigma V.q\varrho r,$$

wo q und r beliebige constante Quaternionen sind, die beide, oder eine derselben, zu Scalaren oder Vectoren werden können.

Operiren wir nun mit $S.\sigma$, wo σ ein beliebiger Vector ist, so folgt:

$$S\sigma\varphi\varrho = \Sigma S\sigma V.q\varrho r = \Sigma S\varrho V.r\sigma q = S\varrho\varphi'\sigma, \quad \ldots\ldots (3)$$

wenn wir festsetzen:

$$\varphi'\sigma = \Sigma V.r\sigma q,$$

und an den Satz des § 88 denken.

Die Functionen φ und φ' sind somit einander *conjugirt*, und auf dieser Eigenschaft beruht die ganze Untersuchung.

145.) λ, μ seien zwei beliebige Vectoren der Art, dass

$$\varphi\varrho = V\lambda\mu.$$

Operirt man mit $S.\lambda$ und $S.\mu$, so folgt:

$$S\lambda\varphi\varrho = 0, \qquad S\mu\varphi\varrho = 0.$$

Führt man die conjugirte Function φ' ein, so werden diese Ausdrücke:

$$S\varrho\varphi'\lambda = 0, \qquad S\varrho\varphi'\mu = 0,$$

und hieraus folgt

$$m\varrho = V\varphi'\lambda\varphi'\mu,$$

wo m eine Scalar ist, die, wie wir jetzt zeigen wollen, von λ, μ und ϱ unabhängig ist.

Unsere ursprüngliche Annahme liefert

$$\varrho = \varphi^{-1}V\lambda\mu;$$

demnach $$m\varphi^{-1}V\lambda\mu = V\varphi'\lambda\varphi'\mu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

und die Aufgabe φ umzukehren ist gelöst.

146.) Es bleibt noch der Werth der Constanten m zu bestimmen, und der Vector

$$V\varphi'\lambda\varphi'\mu$$

muss ausgedrückt werden als Function von $V\lambda\mu$.

Man operire auf (4) mit $S.\varphi'\nu$, wo ν ein beliebiger Vector ist, der nicht mit λ und μ complanar ist; wir erhalten:

$$m\,S.\varphi'\nu\varphi^{-1}V\lambda\mu = m\,S.\nu\varphi\varphi^{-1}V\lambda\mu \quad (\S\ 144\ (3))$$
$$= m\,S.\lambda\mu\nu = S.\varphi'\lambda\varphi'\mu\varphi'\nu,$$

oder $$m = \frac{S.\varphi'\lambda\varphi'\mu\varphi'\nu}{S.\lambda\mu\nu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

[Diese Grösse ist in der That unabhängig von den speciellen Werthen der Vectoren λ, μ, ν. Denn setzt man

$$\lambda' = p\lambda + q\mu + r\nu, \quad \mu' = p_1\lambda + q_1\mu + r_1\nu, \quad \nu' = p_2\lambda + q_2\mu + r_2\nu,$$

wo λ', μ', ν' drei beliebige andere Vectoren sind, da λ, μ, ν nicht complanar sein sollten, so folgt:

$$\varphi'\lambda' = p\varphi'\lambda + q\varphi'\mu + r\varphi'\nu, \quad \text{u. s. w.}$$

Hieraus folgt:

$$S.\varphi'\lambda'\varphi'\mu'\varphi'\nu' = \begin{vmatrix} p & q & r \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} S.\varphi'\lambda\varphi'\mu\varphi'\nu$$

und

$$S.\lambda'\mu'\nu = \begin{vmatrix} p & q & r \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} S.\lambda\mu\nu.$$

Der Zähler und Nenner des Bruches, welcher m ausdrückt, ändern sich also in demselben Verhältnisse. Jede dieser Grössen ist in der That eine *Invariante*, und der numerische Factor ist derselbe für beide, wenn wir von einem System von drei Vectoren zu einem andern übergehen. Einen noch einfachern Beweis hierfür erhält man, indem man in (5) $\lambda + p\mu$ schreibt an Stelle von λ und sieht, dass weder Zähler noch Nenner sich ändert.]

147.) Wir wollen nun an Stelle von φ setzen $\varphi + g$, wo g eine beliebige Scalar ist. φ' wird dann zu $\varphi' + g$ und Gleichung (4) wird:

$$\begin{aligned} m_g(\varphi+g)^{-1}V\lambda\mu &= V(\varphi'+g)\lambda(\varphi'+g)\mu; \\ &= V\varphi'\lambda\varphi'\mu + gV(\varphi'\lambda\mu+\lambda\varphi'\mu) + g^2V\lambda\mu \\ &= (m\varphi^{-1}+g\chi+g^2)V\lambda\mu, \end{aligned}$$

wie wir schreiben wollen.

In obiger Gleichung ist

$$m_g = \frac{S.(\varphi'+g)\lambda(\varphi'+g)\mu(\varphi'+g)\nu}{S.\lambda\mu\nu}$$
$$= m + m_1 g + m_2 g^2 + g^3.$$

m_g ist also was m wird, wenn φ in $(\varphi + g)$ verwandelt wird; m_1, m_2 sind zwei neue Scalarconstanten, deren Werthe sind:

$$m_1 = \frac{S.(\lambda\varphi'\mu\varphi'\nu+\varphi'\lambda\mu\varphi'\nu+\varphi'\lambda\varphi'\mu\nu)}{S.\lambda\mu\nu},$$

$$m_2 = \frac{S.(\lambda\mu\varphi'\nu+\varphi'\lambda\mu\nu+\lambda\varphi'\mu\nu)}{S.\lambda\mu\nu}.$$

Setzen wir hier an Stelle von λ $\lambda + p\mu$, so verschwinden die Glieder in p identisch; diese Ausdrücke sind also ebenfalls Invarianten.

Substituirt man diese Werthe in m_g und setzt die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von g einander gleich, nachdem man auf beiden Seiten der ersten Gleichung mit $\varphi + g$ operirt hat, so erhält man zwei Identitäten und folgende Gleichungen:

$$m_2 = \varphi + \chi$$
$$m_1 = \varphi\chi + m\varphi^{-1}.$$

[Die erste bestimmt χ und zeigt, dass wir berechtigt waren, $V(\varphi'\lambda\mu + \lambda\varphi'\mu)$ als lineare Vectorfunction von $V.\lambda\mu$ anzusehen. Man hätte auch auf folgende Weise zu diesem Resultate gelangen können:

$$\begin{aligned} S.\lambda\chi V\lambda\mu &= S.\lambda\varphi'\lambda\mu = -S.\lambda\mu\varphi'\lambda = -S.\lambda\varphi V\lambda\mu, \\ S.\mu\chi V\lambda\mu &= S.\mu\lambda\varphi'\mu = -S.\mu\varphi V\lambda\mu, \\ S.\nu\chi V\lambda\mu &= S.(\nu\varphi'\lambda\mu+\nu\lambda\varphi'\mu) \\ &= m_2 S\lambda\mu\nu - S.\lambda\mu\varphi'\nu \\ &= S.\nu(m_2 V\lambda\mu - \varphi V\lambda\mu); \end{aligned}$$

und allen drei Ausdrücken wird allgemein genügt durch

$$\chi = m_2 - \varphi.]$$

148.) Eliminirt man χ aus diesen Gleichungen, so findet man

$$m_1 = \varphi(m_2 - \varphi) + m\varphi^{-1},$$

oder
$$m\varphi^{-1} = m_1 - m_2\varphi + \varphi^2.$$

Und dies ist die vollständige Lösung einer linearen Vectorgleichung.

149.) Um den Leser von der Richtigkeit der obigen Untersuchung zu überzeugen, wenn die Neuheit des Verfahrens ihm Schwierigkeit gemacht haben sollte, wollen wir mit einigen einfachen Beispielen beginnen. Wir behandeln dieselben sehr ausführlich und vergleichen die durch die allgemeine Methode erhaltenen Lösungen mit andern, die auf einem Wege gewonnen wurden, der für den einzelnen Fall zum Ziele führte.

150.) Beispiel I.

Es sei $$\varphi\varrho = V.\alpha\varrho\beta = \gamma,$$

dann ist $$\varphi'\varrho = V.\beta\varrho\alpha = \varphi\varrho,$$

folglich $$m = \frac{1}{S.\lambda\mu\nu} S(V.\alpha\lambda\beta\, V.\alpha\mu\beta\, V.\alpha\nu\beta).$$

λ, μ, ν haben der einzigen Bedingung zu genügen, nicht complanar zu sein; erfüllen α, β, γ diese Bedingung, so können wir α, β, γ setzen an Stelle von λ, μ, ν.

Unter dieser Voraussetzung ist:

$$m = \frac{1}{S.\alpha\beta\gamma} S(\alpha^2\beta.\alpha\beta^2.V.\alpha\gamma\beta)$$
$$= \alpha^2\beta^2 S\alpha\beta,$$

$$m_1 = \frac{1}{S.\alpha\beta\gamma} S(\alpha^2\beta.\alpha\beta^2.\gamma + \alpha.\alpha\beta^2.V.\alpha\gamma\beta + \alpha^2\beta.\beta.V.\alpha\gamma\beta)$$
$$= -\alpha^2\beta^2$$

$$m_2 = -\frac{1}{S.\alpha\beta\gamma} S(\alpha^2\beta.\beta.\gamma + \alpha.\alpha\beta^2.\gamma + \alpha\beta\, V.\alpha\gamma\beta)$$
$$= -S\alpha\beta.$$

Hieraus:

$$\alpha^2\beta^2 S\alpha\beta.\varphi^{-1}\gamma = \alpha^2\beta^2 S\alpha\beta.\varrho = -\alpha^2\beta^2\gamma + S\alpha\beta\, V.\alpha\gamma\beta + V.\alpha(V.\alpha\beta\gamma)\beta,$$

es ist dies eine Form der Lösung.

Entwickeln wir die Vectoren der Producte, so können wir denselben die Gestalt geben:

$$\alpha^2\beta^2 S\alpha\beta.\gamma = -\alpha^2\beta^2\gamma + \alpha\beta^2 S\alpha\gamma + \beta\alpha^2 S\beta\gamma,$$

oder $$\varrho = \frac{\alpha^{-1}S\alpha\gamma + \beta^{-1}S\beta\gamma - \gamma}{S\alpha\beta}.$$

151.) Um diese Gleichung zu verificiren, haben wir

$$V.\alpha\varrho\beta = \frac{1}{S\alpha\beta}(\beta S\alpha\gamma + \alpha S\beta\gamma - V.\alpha\gamma\beta) = \gamma$$

und dies ist die gegebene Gleichung.

152.) In diesem einfachen Falle gelangt man leichter auf folgende Weise zu derselben Lösung.

Operirt man mit $S.\alpha$ und $S.\beta$ auf die gegebene Gleichung

$$V.\alpha\varrho\beta = \gamma$$

so folgt

$$\alpha^2 S\varrho\beta = S\alpha\gamma,$$
$$\beta^2 S\alpha\varrho = S\beta\gamma;$$

hieraus

$$\alpha S\beta\varrho = \alpha^{-1} S\alpha\gamma$$
$$\beta S\alpha\varrho = \beta^{-1} S\beta\gamma.$$

Nun kann man die gegebene Gleichung schreiben:

$$\alpha S\beta\varrho - \varrho S\alpha\beta + \beta S\alpha\varrho = \gamma.$$

Substituirt und ordnet man, so folgt:

$$\varrho S\alpha\beta = \alpha^{-1} S\alpha\gamma + \beta^{-1} S\beta\gamma - \gamma;$$

es ist dies das Ergebniss des § 150.

153.) Sind α, β, γ complanar, so kann man dies Verfahren befolgen; man kann aber das Resultat auf einfachere Weise ableiten.

Nach § 101 ist dann $S.\alpha\beta\gamma = 0$, und die Gleichung liefert $S.\alpha\beta\varrho = 0$, ϱ ist also complanar mit α, β, γ. Wir können die gegebene Gleichung jetzt schreiben

$$\alpha\varrho\beta = \gamma,$$

und hieraus ergibt sich unmittelbar

$$\varrho = \alpha^{-1}\gamma\beta^{-1};$$

da dies ein Vector ist, können wir schreiben

$$= \alpha^{-1} S\beta^{-1}\gamma + \beta^{-1} S\alpha^{-1}\gamma - \gamma S\alpha^{-1}\beta^{-1}.$$

Diese Formel ist *gleichbedeutend* mit der obigen, aber nicht derselben gleich, Glied für Glied.

[Es ist eine gute Uebung für den Leser, *direkt* nachzuweisen, dass, wenn α, β, γ complanar sind, man hat:

$$\frac{1}{S\alpha\beta}(\alpha^{-1} S\alpha\gamma + \beta^{-1} S\beta\gamma - \gamma) = \alpha^{-1} S\beta^{-1}\gamma + \beta^{-1} S\alpha\gamma^{-1} - \gamma S\alpha^{-1}\beta^{-1}.]$$

Hieraus folgt nicht nothwendiger Weise

$$S.\alpha\beta\varrho = 0,$$

wenn

$$S\alpha\beta = 0.$$

Die ursprüngliche Gleichung wird dann aber:

$$\alpha S\beta\varrho + \beta S\alpha\varrho = \gamma,$$

und diese kann gleichzeitig bestehen mit

$$S.\alpha\beta\gamma = 0.$$

Dies liefert:

$$\gamma(\alpha^2\beta^2 - S^2\alpha\beta) = \alpha \begin{vmatrix} S\alpha\gamma & S\alpha\beta \\ S\beta\gamma & \beta^2 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} S\beta\gamma & S\alpha\beta \\ S\alpha\gamma & \alpha^2 \end{vmatrix}.$$

Vergleicht man dies mit der gegebenen Gleichung, so sind $S\beta\varrho$ und $S\alpha\varrho$ bestimmt; es bleibt also noch ϱ mit einem unbestimmten Scalar.

154.) Beispiel II.

Es sei $$\varphi\varrho = V.\alpha\beta\varrho = \gamma.$$

Wir nehmen an, dass α, β, γ nicht complanar sind und benutzen sie als die λ, μ, ν, um die Coefficienten der Gleichung für φ^{-1} zu berechnen. Wir haben

$$S.\sigma\varphi\varrho = S.\sigma\alpha\beta\varrho = S.\varrho V.\sigma\alpha\beta = S.\varrho\varphi'\sigma,$$

hieraus: $$\varphi'\varrho = V.\varrho\alpha\beta = V.\beta\alpha\varrho.$$

Wir erhalten nun:

$$m = \frac{1}{S.\alpha\beta\gamma} S(\beta\alpha^2.\beta\alpha\beta.V.\beta\alpha\gamma) = \frac{\alpha^2\beta^2}{S.\alpha\beta\gamma} S.\alpha\beta V.\beta\alpha\gamma$$
$$= \alpha^2\beta^2 S\alpha\beta,$$
$$m_1 = \frac{1}{S.\alpha\beta\gamma} S(\alpha.\beta\alpha\beta.V.\beta\alpha\gamma + \beta\alpha^2.\beta.V.\beta\alpha\gamma + \beta\alpha^2.\beta\alpha\beta.\gamma)$$
$$= 2(S\alpha\beta)^2 + \alpha^2\beta^2,$$
$$m_2 = \frac{1}{S.\alpha\beta\gamma} S(\alpha.\beta.V.\beta\alpha\gamma + \alpha.\beta\alpha\beta.\gamma + \beta\alpha^2.\beta.\gamma)$$
$$= 3S\alpha\beta.$$

Hieraus:

$$\alpha^2\beta^2 S\alpha\beta.\varphi^{-1}\gamma = \alpha^2\beta^2 S\alpha\beta.\varrho$$
$$= 2((S\alpha\beta)^2+\alpha^2\beta^2)\gamma - 3S\alpha\beta V.\alpha\beta\gamma + V.\alpha\beta V.\alpha\beta\gamma.$$

Entwickelt man die Vectoren der Producte, so erhält man die einfachere Form:

$$\alpha^2\beta^2 S\alpha\beta.\varrho = \alpha^2\beta^2\gamma + \alpha\beta^2 S\alpha\gamma + 2\beta S\alpha\beta S\alpha\gamma - \beta\alpha^2 S\beta\gamma.$$

155.) Um dies zu verificiren, operire man mit $V.\alpha\beta$ auf beide Seiten. Man erhält:

$$\alpha^2\beta^2 S\alpha\beta V.\alpha\beta\varrho = \alpha^2\beta^2.V\alpha\beta\gamma - V.\alpha\beta\alpha\beta^2 S\alpha\gamma + 2\alpha\beta^2 S\alpha\beta S\alpha\gamma$$
$$- \alpha\alpha^2\beta^2 S\beta\gamma$$
$$= \alpha^2\beta^2(\alpha S\beta\gamma - \beta S\alpha\gamma + \gamma S\alpha\beta) - (2\alpha S\alpha\beta - \beta\alpha^2)\beta^2 S\alpha\gamma$$
$$+ 2\alpha\beta^2 S\alpha\beta S\alpha\gamma + \alpha\alpha^2\beta^2 S\beta\gamma$$
$$= \alpha^2\beta^2 S\alpha\beta.\gamma$$

oder $$V.\alpha\beta\varrho = \gamma.$$

156.) Um dieselbe Gleichung aufzulösen, ohne die allgemeine Methode zu gebrauchen, können wir folgenden Weg einschlagen:

$$\gamma = V.\alpha\beta\varrho = \varrho S\alpha\beta + V.V(\alpha\beta)\varrho.$$

Operirt man mit $S.V\alpha\beta$, so folgt:

$$S.\alpha\beta\gamma = S.\alpha\beta\varrho S\alpha\beta.$$

Man dividire dies durch $S\alpha\beta$ und addire es zu der gegebenen Gleichung. Man erhält:

$$\gamma + \frac{S.\alpha\beta\gamma}{S\alpha\beta} = \varrho S\alpha\beta + V.V(\alpha\beta)\varrho + S.V(\alpha\beta)\varrho$$
$$= (S\alpha\beta + V\alpha\beta)\varrho$$
$$= \alpha\beta\varrho,$$

und
$$\varrho = \beta^{-1}\alpha^{-1}\left(\gamma + \frac{S.\alpha\beta\gamma}{S\alpha\beta}\right),$$

eine etwas einfachere Form der Lösung als die obige.

Um nachzuweisen, dass die beiden übereinstimmen, multipliciren wir mit $\alpha^2\beta^2 S\alpha\beta$ und erhalten:

$$\alpha^2\beta^2 S\alpha\beta\,.\,\varrho = \beta\alpha\gamma S\alpha\beta + \beta\alpha S.\alpha\beta\gamma\,.$$

In dieser Form sieht man sofort, dass die rechte Seite ein Vector ist, da ihre Scalar gleich Null ist (§ 89). Wir können also schreiben

$$\alpha^2\beta^2 S\alpha\beta\,.\,\varrho = V.\beta\alpha\gamma S\alpha\beta - V\alpha\beta S.\alpha\beta\gamma\,.$$

Aber nach (3) § 91 ist

$$-\gamma S.\alpha\beta V\alpha\beta + \alpha S.\beta(V\alpha\beta)\gamma + \beta.SV(\alpha\beta)\alpha\gamma + V\alpha\beta S.\alpha\beta\gamma = 0.$$

Addiren wir dies zu dem Gliede auf der rechten Seite, so erhalten wir:

$$\alpha^2\beta^2 S\alpha\beta\,.\,\varrho = \gamma((S\alpha\beta)^2 - S.\alpha\beta V\alpha\beta) - \alpha(S\alpha\beta S\beta\gamma - S.\beta(V\alpha\beta)\gamma)$$
$$+ (\beta S\alpha\beta S\alpha\gamma + S.V(\alpha\beta)\alpha\gamma).$$

Nun ist:

$$(S\alpha\beta)^2 - S.\alpha\beta V\alpha\beta = (S\alpha\beta)^2 - (V\alpha\beta)^2 = \alpha^2\beta^2,$$
$$S\alpha\beta S\beta\gamma - S.\beta(V\alpha\beta)\gamma = S\alpha\beta S\beta\gamma - S\beta\alpha S\beta\gamma + \beta^2 S\alpha\gamma$$
$$= \beta^2 S\alpha\gamma$$
$$S\alpha\beta S\alpha\gamma + S.V(\alpha\beta)\alpha\gamma = S\alpha\beta S\alpha\gamma + S\alpha\beta S\alpha\gamma - \alpha^2 S\beta\gamma$$
$$= 2S\alpha\beta S\alpha\gamma - \alpha^2 S\beta\gamma\,.$$

Substituirt man diese Werthe, so wird die Gleichung identisch mit derjenigen in § 154.

[Sind α, β, γ complanar, so gibt der vereinfachte Ausdruck für ϱ

$$S\alpha\beta\,.\,\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma = \gamma - \alpha^{-1}S\alpha\gamma + 2\beta S\alpha^{-1}\beta^{-1}S\alpha\gamma - \beta^{-1}S\beta\gamma;$$

wir überlassen dies dem Leser zur Uebung.]

157.) Beispiel III.

Die Lösung der Gleichung

$$V\varepsilon\varrho = \gamma$$

führt zum Verschwinden einiger der Grössen m. Ehe wir nun die Aufgabe nach der allgemeinen Methode behandeln, wollen wir deren Lösung herleiten aus derjenigen von

$$V.\alpha\beta\varrho = \gamma,$$

die wir schon kennen. Wir thun dies deshalb, um eine Gelegenheit

zu haben, die Natur einiger der Fälle zu betrachten, in denen eine oder mehrere der Grössen m, m_1, m_2 verschwinden; wir werden dabei auch zeigen, wie man verschwindende Brüche in die Quaternionenrechnung einführen kann.

In den nächsten Paragraphen werden wir weit einfachere Lösungen geben.

Die Lösung der erwähnten Gleichung ist (§ 154):

$$\alpha^2\beta^2 S\alpha\beta \,.\, \varrho = \alpha^2\beta^2\gamma - \alpha\beta^2 S\alpha\gamma - \beta\alpha^2 S\beta\gamma + 2\beta S\alpha\beta S\alpha\gamma \,.$$

Setzen wir nun

$$\alpha\beta = e + \varepsilon,$$

wo e eine Scalar ist. Man erhält die Lösung der jetzt zu behandelnden Gleichung aus der angeführten, indem man e verschwinden lässt. Wir haben zunächst folgende Umformungen vorzunehmen.

$$\begin{aligned}
\alpha^2\beta^2 = \alpha\beta K\alpha\beta &= (e+\varepsilon)(e-\varepsilon) = e^2 - \varepsilon^2, \\
\alpha\beta^2 S\alpha\gamma + \beta\alpha^2 S\beta\gamma &= \alpha\beta \,.\, \beta S\alpha\gamma + \beta\alpha \,.\, \alpha S\beta\gamma, \\
&= (e+\varepsilon)\beta S\alpha\gamma + (e-\varepsilon)\alpha S\beta\gamma, \\
&= e(\beta S\alpha\gamma + \alpha S\beta\gamma) + \varepsilon V \,.\, \gamma V\alpha\beta, \\
&= e(\beta S\alpha\gamma + \alpha S\beta\gamma) + \varepsilon V\gamma\varepsilon \,.
\end{aligned}$$

Die Lösung wird also

$$\begin{aligned}
(e^2 - \varepsilon^2)e\varrho &= (e^2 - \varepsilon^2)\gamma - e(\beta S\alpha\gamma + \alpha S\beta\gamma) - \varepsilon V\gamma\varepsilon + 2e\beta S\alpha\gamma, \\
&= (e^2 - \varepsilon^2)\gamma + eV \,.\, \gamma V\alpha\beta - \varepsilon V\gamma\varepsilon, \\
&= (e^2 - \varepsilon^2)\gamma + eV\gamma\varepsilon + \gamma\varepsilon^2 - \varepsilon S\gamma\varepsilon, \\
&= e^2\gamma + eV\gamma\varepsilon - \varepsilon S\gamma\varepsilon \,.
\end{aligned}$$

Dividirt man durch e und setzt dann $e = 0$, so erhält man

$$-\varepsilon^2\varrho = V\gamma\varepsilon - \varepsilon L_o\left(\frac{S\gamma\varepsilon}{e}\right).$$

Aus der gegebenen Gleichung folgt aber

$$S\gamma\varepsilon = 0.$$

Die Grenze ist also unbestimmt, und wir können dafür x setzen, wo x eine beliebige Scalar ist.

Unsere Lösung wird demnach:

$$\varrho = -V\frac{\gamma}{\varepsilon} + x\varepsilon^{-1}.$$

Da $S\gamma\varepsilon = 0$, kann man auch schreiben:

$$\varrho = \varepsilon^{-1}(\gamma + x);$$

hieraus

$$\varepsilon\varrho = \gamma + x,$$

gleichbedeutend mit der gegebenen Gleichung.

158.) Dies führt uns zu einer sehr einfachen Auflösungsmethode. Wir sehen nämlich, dass die gegebene Gleichung $S\varepsilon\varrho$ unbestimmt lässt.

Setzen wir also

$$S\varepsilon\varrho = x$$

und addiren dies zu der gegebenen Gleichung, so erhalten wir

$$\varepsilon\varrho = x + \gamma$$

oder

$$\varrho = \varepsilon^{-1}(\gamma + x),$$

wenn, und nur wenn ϱ der Gleichung genügt:

$$V\varepsilon\varrho = \gamma.$$

159.) Um die allgemeine Methode anzuwenden, können wir ε, γ und $\varepsilon\gamma$ (welches ein Vector ist) zu den λ, μ, ν wählen.

Wir erhalten: $\varphi'\varrho = V\varrho\varepsilon,$

hieraus

$$m = 0,$$

$$m_1 = -\frac{1}{\varepsilon^2\gamma^2} S(\varepsilon . \varepsilon\gamma . \varepsilon^2\gamma) = -\varepsilon^2,$$

$$m_2 = 0.$$

Folglich $-\varepsilon^2\varphi + \varphi^3 = 0,$

oder $\varphi^{-1} = \frac{1}{\varepsilon^2}\varphi + \varphi^{-2}0;$

dies ist $\varrho = \frac{1}{\varepsilon^2} V\varepsilon\gamma + x\varepsilon,$

$= \varepsilon^{-1}\gamma + x\varepsilon$ wie oben.

Wir rechtfertigen das Setzen von $\varphi^{-2}0 = x\varepsilon$ wie folgt:

Die Gleichung $\varphi^2\sigma = 0$

kann geschrieben werden

$$V . \varepsilon V\varepsilon\sigma = 0 = \sigma\varepsilon^2 - \varepsilon S\varepsilon\sigma .$$

Somit, wenn nicht $\sigma = 0$, haben wir

$$\sigma \parallel \varepsilon = x\varepsilon .$$

160.) Beispiel IV.

Zum Schluss wollen wir die allgemeinste Form von φ wählen, die, wie wir bald nachweisen werden, ausgedrückt werden kann wie folgt:

$$\varphi\varrho = \alpha S\beta\varrho + \alpha_1 S\beta_1\varrho + \alpha_2 S\beta_2\varrho = \gamma.$$

Hier ist: $\varphi'\varrho = \beta S\alpha\varrho + \beta_1 S\alpha_1\varrho + \beta_2 S\alpha_2\varrho .$

Nehmen wir α, α_1, α_2, die in diesem Falle nicht complanare Vectoren sind, zu den λ, μ, ν, so haben wir:

$$m = \frac{1}{S . \alpha\alpha_1\alpha_2} S . (\beta S\alpha\alpha + \beta_1 S\alpha_1\alpha + \beta_2 S\alpha_2\alpha)(\beta S\alpha\alpha_1 + \beta_1 S\alpha_1\alpha_1 + \ldots)(\beta S\alpha\alpha_2 + \ldots)$$

$$= \frac{S . \beta\beta_1\beta_2}{S . \alpha\alpha_1\alpha_2} \begin{vmatrix} S\alpha\alpha & S\alpha_1\alpha & S\alpha_2\alpha \\ S\alpha\alpha_1 & S\alpha_1\alpha_1 & S\alpha_2\alpha_1 \\ S\alpha\alpha_2 & S\alpha_1\alpha_2 & S\alpha_2\alpha_2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{S . \beta\beta_1\beta_2}{S . \alpha\alpha_1\alpha_2} (AS\alpha\alpha + A_2 S\alpha_1\alpha + A_2 S\alpha_2\alpha),$$

wo
$$A = S\alpha_1\alpha_1 S\alpha_2\alpha_2 - S\alpha_2\alpha_1 S\alpha_1\alpha_2$$
$$= -S.V\alpha_1\alpha_2 V\alpha_1\alpha_2,$$
$$A_1 = S\alpha_2\alpha_1 S\alpha\alpha_2 - S\alpha\alpha_1 S\alpha_2\alpha_2$$
$$= -S.V\alpha_2\alpha V\alpha_1\alpha_2,$$
$$A_2 = S\alpha\alpha_1 S\alpha_1\alpha_2 - S\alpha_1\alpha_1 S\alpha\alpha_2$$
$$= -S.V\alpha\alpha_1 V\alpha_1\alpha_2.$$

Demzufolge ist der Werth der Determinante

$$-(S\alpha\alpha S.V\alpha_1\alpha_2 V\alpha_1\alpha_2 + S\alpha_1\alpha S.V\alpha_2\alpha V\alpha_1\alpha_2 + S\alpha_2\alpha S.V\alpha\alpha_1 V\alpha_1\alpha_2)$$
$$= -S.\alpha(V\alpha_1\alpha_2 S.\alpha\alpha_1\alpha_2) \quad \{\text{nach § 92 (3)}\} = -(S.\alpha\alpha_1\alpha_2)^2.$$

Die Interpretation dieses Resultates in der sphärischen Trigonometrie ist sehr interessant. (Siehe Beispiel (6) S. 73.)

Hiernach hat man

$$m = -S.\alpha\alpha_1\alpha_2 S.\beta\beta_1\beta_2,$$

dem entsprechend

$$m_1 = \frac{1}{S.\alpha\alpha_1\alpha_2} S.[\alpha(\beta S\alpha\alpha_1 + \beta_1 S\alpha_1\alpha + \beta_2 S\alpha_2\alpha_1)(\beta S\alpha\alpha_1 + \beta_1 S\alpha_1\alpha_2 + \beta_2 S\alpha_2\alpha_2) + \text{u. s. w.}]$$
$$= \frac{1}{S.\alpha\alpha_1\alpha_2}(S.\alpha\beta\beta_1(S\alpha\alpha_1 S\alpha_1\alpha_2 - S\alpha_1\alpha_1 S\alpha\alpha_2) + \ldots.)$$
$$= \frac{1}{S.\alpha\alpha_1\alpha_2}(S.\alpha\beta\beta_1 S.\alpha V\alpha_1 V\alpha_2\alpha_1 + \ldots.)$$
$$= -\frac{1}{S.\alpha\alpha_1\alpha_2}[S.\alpha(V\beta\beta_1 S.V\alpha\alpha_1 V\alpha_1\alpha_2 + V\beta_2\beta S.V\alpha_2\alpha V\alpha_1\alpha_2 + V\beta_1\beta_2 S.V\alpha_1\alpha_2 V\alpha_1\alpha_2)$$
$$+ S.\alpha_1(V\beta\beta_1 S.V\alpha\alpha_1 V\alpha_2\alpha + \ldots.)$$
$$+ S.\alpha_2(V\beta\beta_2 S.V\alpha\alpha_1 V\alpha\alpha_1 + \ldots.)];$$

oder, fasst man die Glieder nach senkrechten statt nach horizontalen Reihen zusammen:

$$= -\frac{1}{S.\alpha\alpha_1\alpha_2}[S.V\beta\beta_1(\alpha S.V\alpha\alpha_1 V\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1 S.V\alpha\alpha_1 V\alpha_2\alpha + \alpha_2 S.V\alpha\alpha_1 V\alpha\alpha_1) + \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots.];$$
$$= \frac{1}{S.\alpha\alpha_1\alpha_2}[S.V\beta\beta_1(V\alpha\alpha_1 S.\alpha\alpha_1\alpha_2) + \ldots\ldots\ldots.];$$
$$= -S(V\alpha\alpha_1 V\beta\beta_1 + V\alpha_1\alpha_2 V\beta_1\beta_2 + V\alpha_2\alpha V\beta_2\beta).$$

Weiter:

$$m_2 = \frac{1}{S.\alpha\alpha_1\alpha_2} S.[\alpha\alpha_1(\beta S\alpha\alpha_2 + \beta_1 S\alpha_1\alpha_2 + \ldots) + \alpha_2\alpha(\beta S\alpha\alpha_1 + \ldots) + \alpha_1\alpha_2(\beta S\alpha\alpha + \ldots)].$$

Fasst man die Glieder zusammen wie oben:

$$= \frac{1}{S.\alpha\alpha_1\alpha_2} S[\beta(V\alpha\alpha_1 S\alpha\alpha_2 + V\alpha_2\alpha S\alpha\alpha_1 + V\alpha_1\alpha_2 S\alpha\alpha) + \ldots],$$
$$= \frac{1}{S.\alpha\alpha_1\alpha_2} S[\beta(\alpha S.\alpha\alpha_1\alpha_2 + \ldots] \quad \S\ 92\ (4),$$
$$= S(\alpha\beta + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2).$$

Die Lösung ist also:

$$\varphi^{-1}\gamma S.\alpha\alpha_1\alpha_2 S.\beta\beta_1\beta_2 = \varrho S.\alpha\alpha_1\alpha_2 S.\beta\beta_1\beta_2$$
$$= \gamma\Sigma S.V\alpha\alpha_1 V\beta\beta_1 + \varphi\gamma\Sigma\alpha\beta - \varphi^2\gamma.$$

[Wir empfehlen dem Leser zur Uebung, die nur angedeuteten Rechnungen durchzuführen und direkt nachzuweisen, dass der für ϱ gefundene Werth der Gleichung genügt.]

161.) Es ist nicht nöthig, dies langwierige Verfahren durchzuführen, um die Lösung zu erhalten, doch wird es dem Leser von Nutzen sein, dem Gange dieser Rechnung aufmerksam zu folgen. Wir schlagen jetzt einen andern Weg ein: wir operiren auf die Gleichung mit $S.\alpha_1\alpha_2$, $S.\alpha_2\alpha$ und $S.\alpha\alpha_1$ und erhalten:

$$S.\alpha_1\alpha_2\alpha\, S\beta\varrho = S.\alpha_1\alpha_2\gamma$$
$$S.\alpha_2\alpha\alpha_1\, S\beta_1\varrho = S.\alpha_2\alpha\gamma$$
$$S.\alpha\alpha_1\alpha_2\, S\beta_2\varrho = S.\alpha\alpha_1\gamma,$$

hieraus und § 92 (4) folgt:

$$\varrho S.\alpha\alpha_1\alpha_2 S.\beta\beta_1\beta_2 = V\beta\beta_1 S.\alpha\alpha_1\gamma + V\beta_1\beta_2 S.\alpha_1\alpha_2\gamma + V\beta_2\beta S.\alpha_2\alpha\gamma.$$

Eine gute Uebung wäre es nachzuweisen, dass diese Lösung und diejenige des § 160 äquivalent sind.

Um die Richtigkeit dieser Lösung nachzuweisen, haben wir:

$$(\alpha S\beta\varrho + \alpha_1 S\beta_1\varrho + \alpha_2 S\beta_2\varrho)S.\alpha\alpha_1\alpha_2 S\beta\beta_1\beta_2$$
$$= \alpha S.\beta\beta_1\beta_2 S.\alpha_1\alpha_2\gamma + \alpha_1 S.\beta_1\beta_2\beta S.\alpha_2\alpha\gamma + \alpha_2 S.\beta_2\beta\beta_1 S.\alpha\alpha_1\gamma$$
$$= S.\beta\beta_1\beta_2(\gamma S.\alpha\alpha_1\alpha_2), \quad \text{nach § 91 (3).}$$

162.) Wir sehen aus diesen Beispielen, dass wir häufig für die besonderen Fälle Lösungen der linearen Vectorgleichung finden können durch einfachere Methoden, als die Anwendung des allgemeinen Verfahrens des § 148. Der Hauptwerth des Verfahrens liegt aber darin, dass es uns in den Stand setzt, die reciproken Functionen von φ, wie $(\varphi + g)^{-1}$ z. B., auszudrücken durch direkte Operationen; eine Eigenschaft, die uns später von grossem Nutzen sein wird. Ein anderer grosser Vorzug der Methode ist, dass sie uns zu der fundamentalen cubischen Gleichung führt:

$$\varphi^3 - m_2\varphi^2 + m_1\varphi - m = 0,$$

die unmittelbar aus der Gleichung des § 148 folgt. Die Interpretation dieser Gleichung ist von der höchsten Wichtigkeit bei Untersuchungen, die sich beziehen auf die Achsen der Flächen zweiter Ordnung, die Hauptträgheitsachsen, die Deformation fester Körper und verschiedene ähnliche Fragen.

163.) Ist die Function φ *ihre eigene Conjugirte*, d. h. ist

$$S\varrho\varphi\sigma = S\sigma\varphi\varrho$$

für jeden Werth von ϱ und σ, so bilden im allgemeinen diejenigen Vectoren, für welche

$$(\varphi - g)\varrho = 0$$

ist, ein reelles und bestimmtes rechtwinkliges System.

In speciellen Fällen kann dies entarten zu einem bestimmten Vector und zwei *beliebigen* andern Vectoren, die auf diesem senkrecht stehen; es kann auch der Fall eintreten, dass *jeder* Vector der Gleichung genügt.

Die Wurzeln der Gleichung $m_g = 0$ (§ 147) seien reell und verschieden, dann ist:

$$\left.\begin{aligned} \varphi\varrho_1 &= g_1\varrho_1 \\ \varphi\varrho_2 &= g_2\varrho_2 \\ \varphi\varrho_3 &= g_3\varrho_3 \end{aligned}\right\}$$ ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, sind drei bestimmte Vectoren, welche durch die Constanten in φ bestimmt sind.

Hieraus: $$\begin{aligned} g_1 g_2 S\varrho_1\varrho_2 &= S.\varphi\varrho_1\varphi\varrho_2 \\ &= S.\varrho_1\varphi^2\varrho_2 \quad \text{oder} \quad S.\varrho_2\varphi^2\varrho_1, \end{aligned}$$

weil φ sich selbst conjugirt ist.

Aber $$\begin{aligned} \varphi^2\varrho_2 &= {g_2}^2\varrho_2, \\ \varphi^2\varrho_1 &= {g_1}^2\varrho_1, \end{aligned}$$

und deshalb $$g_1 g_2 S\varrho_1\varrho_2 = {g_2}^2 S\varrho_1\varrho_2 = {g_1}^2 S\varrho_1\varrho_2;$$

da der Annahme zu Folge g_1 von g_2 verschieden ist, so muss sein:

$$S\varrho_1\varrho_2 = 0;$$

dem entsprechend findet man:

$$S\varrho_2\varrho_3 = 0, \qquad S\varrho_3\varrho_1 = 0.$$

Sind zwei Wurzeln einander gleich, also $g_2 = g_3$, so haben wir noch immer $S\varrho_1\varrho_2 = 0$, $S\varrho_3\varrho_1 = 0$. Aber nichts bestimmt ϱ_2 und ϱ_3 näher, und diese sind deshalb beliebige auf ϱ_1 senkrecht stehende Vectoren.

Sind die drei Wurzeln gleich, so genügt *jeder* reelle Vector der Gleichung $(\varphi - g)\varrho = 0$.

164.) Wir wollen jetzt untersuchen, ob die drei betrachteten Richtungen immer reell sind.

Nehmen wir an, eine der Wurzeln sei $g_2 + h_2\sqrt{-1}$, und $\varrho_2 + \sigma_2\sqrt{-1}$ sei der entsprechende Werth von ϱ. g_2 und h_2 sind reelle Zahlen, ϱ_2 und σ_2 reelle Vectoren, und $\sqrt{-1}$ das alte Imaginäre der Algebra. Man hat dann:

$$\varphi(\varrho_2 + \sigma_2\sqrt{-1}) = (g_2 + h_2\sqrt{-1})(\varrho_2 + \sigma_2\sqrt{-1});$$

dies zerfällt, wie in der Algebra, in zwei Gleichungen:

$$\varphi\varrho_2 = g_2\varrho_2 - h_2\sigma_2,$$
$$\varphi\sigma_2 = h_2\varrho_2 + g_2\sigma_2.$$

Operirt man auf die erste dieser Gleichungen mit $S.\sigma_2$, auf die zweite mit $S.\varrho_2$, zieht die Resultate von einander ab und berücksichtigt, dass

$$S\sigma_2\varphi\varrho_2 = S\varrho_2\varphi\sigma_2,$$

so folgt $$h_2(\sigma_2^2 + \varrho_2^2) = 0.$$

Da σ_2 und ϱ_2 beide reelle Vectoren sind, so kann die Summe ihrer Quadrate nicht verschwinden; h_2 muss also verschwinden, und mit ihm der imaginäre Theil der Wurzel.

165.) Wir haben also nachgewiesen, dass, wenn φ selbstconjugirt ist, die Gleichung

$$g^3 - m_2g^2 + m_1g - m = 0$$

drei reelle Wurzeln hat, die im allgemeinen verschiedene Werthe haben.

Wir können die cubische Gleichung also schreiben:

$$(\varphi - g_1)(\varphi - g_2)(\varphi - g_3) = 0,$$

und in dieser Form erkennen wir leicht die Bedeutung derselben. Es seien nämlich ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 drei Vectoren der Art, dass

$$(\varphi - g_1)\varrho_1 = 0, \qquad (\varphi - g_2)\varrho_2 = 0, \qquad (\varphi - g_3)\varrho_3 = 0.$$

Nun kann jeder Vector ϱ dargestellt werden durch:

$$\varrho S.\varrho_1\varrho_2\varrho_3 = \varrho_1 S.\varrho_2\varrho_3\varrho + \varrho_2 S.\varrho_3\varrho_1\varrho + \varrho_3 S.\varrho_1\varrho_2\varrho \text{ (§ 91).}$$

Nimmt man nun auf ϱ die zusammengesetzte Operation vor, die durch die linke Seite jener symbolischen Gleichung dargestellt wird, so sieht man, dass der erste der drei Factoren die Glieder in ϱ_1 zum Verschwinden bringt, der zweite und dritte diejenigen in ϱ_2 und ϱ_3. Mit andern Worten: führt man auf einen Vector nacheinander die Operationen $\varphi - g_1$, $\varphi - g_2$, $\varphi - g_3$ aus, so verschwindet zuerst die Componente des Vectors nach ϱ_1, dann die nach ϱ_2, und zuletzt die Componente nach ϱ_3. Der Vector wird so nothwendiger Weise zu Null, denn ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 sind bestimmte nicht complanare Vectoren, da wir annahmen, dass g_1, g_2, g_3 verschiedene Werthe haben sollten.

166.) Sind ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 aufeinander senkrecht stehende Einheits-Vectoren, so folgt:

$$-\varrho = \varrho_1 S\varrho_1\varrho + \varrho_2 S\varrho_2\varrho + \varrho_3 S\varrho_3\varrho,$$

und hieraus:

$$\varphi\varrho = -g_1\varrho_1 S\varrho_1\varrho - g_2\varrho_2 S\varrho_2\varrho - g_3\varrho_3 S\varrho_3\varrho;$$

oder noch einfacher, indem man i, j, k statt ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 setzt, findet man, dass *jede* selbstconjugirte Function ausgedrückt werden kann wie folgt:

$$\varphi\varrho = -g_1 iSi\varrho - g_2 jSj\varrho - g_3 kSk\varrho,$$

vorausgesetzt, dass i, j, k die Wurzeln sind der Gleichung

$$V\varrho\varphi\varrho = 0.$$

167.) Hieraus kann man leicht eine sehr wichtige Umformung der selbstconjugirten linearen Vectorfunction herleiten.

Wir sahen, dass obige Formel *drei* Scalarconstanten einschliesst, nämlich g_1, g_2, g_3. Wir wollen untersuchen, ob man sie auf folgende Form bringen kann:

$$\varphi\varrho = f\varrho + hV.(i+ek)\varrho(i-ek),$$

die ebenfalls nur drei Scalarconstanten einschliesst, nämlich f, h, e.

Auch hier sind i, j, k die Wurzeln der Gleichung

$$V\varrho\varphi\varrho = 0.$$

Setzen wir an Stelle von ϱ das equivalente

$$\varrho = -iSi\varrho - jSj\varrho - kSk\varrho,$$

entwickeln und setzen die Coefficienten von i, j, k in den beiden Ausdrücken für $\varphi\varrho$ einander gleich, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} -g_1 &= -f + h(2-1+e^2),\\ -g_2 &= -f - h(1-e^2),\\ -g_3 &= -f - h(2e^2+1-e^2),\end{aligned}$$

und hieraus:

$$\begin{aligned} -(g_1-g_2) &= 2h,\\ -(g_2-g_3) &= 2e^2h.\end{aligned}$$

Da wir die Transformation als reell annehmen, e^2 also positiv ist, so haben g_1-g_2 und g_2-g_3 dasselbe Vorzeichen; wir müssen also in dem letzten Gliede von $\varphi\varrho$ zu Hilfs-Vectoren diejenigen zwei von den rechtwinkligen Richtungen i, j, k wählen, für welche die Coefficienten g den grössten und den kleinsten Werth haben.

Wir haben dann:

$$e^2 = \frac{g_2-g_3}{g_1-g_2},$$

$$h = -\tfrac{1}{2}(g_1-g_2),$$

und

$$f = \tfrac{1}{2}(g_1+g_3).$$

168.) Wir können deshalb in der Gleichung

$$\varphi\varrho = f\varrho + V.\lambda\varrho\mu$$

immer bestimmte Werthe für die Scalar f und die Vectoren λ, μ auffinden, wenn φ selbstconjugirt ist und die entsprechende cubische Gleichung keine gleiche Wurzeln hat; die einzige Bedingung ist, dass

$$T.\lambda\mu$$

bekannt sei, aber nicht die Tensoren von λ, μ einzeln genommen. Diese Resultate sind von Wichtigkeit in der Theorie der Flächen

zweiter Ordnung, und wir werden in Kapitel VII darauf zurückkommen.

169.) Eine andere wichtige Transformation des selbstconjugirten φ ist folgende:

$$\varphi\varrho = a\alpha V\alpha\varrho + b\beta S\beta\varrho,$$

wo a und b Scalaren sind, α und β Einheits-Vectoren. Diese Form umfasst drei Scalarconstanten und gehört zu der allgemeineren Form:

$$\varphi\varrho = -g_1\varrho_1 S\varrho_1\varrho - g_2\varrho_2 S\varrho_2\varrho - g_3\varrho_3 S\varrho_3\varrho,$$

wo ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 die rechtwinkligen Einheits-Vectoren sind, für welche ϱ und $\varphi\varrho$ parallel sind.

Wir führen diese Form nur im Vorübergehen an, da sie zu der *focalen* Transformation der Gleichung der Flächen zweiter Ordnung gehört, die wir in diesem Werke nicht weiter berühren wollen. Es wird eine gute Uebung für den Leser sein, α, β, a und b durch g_1, g_2, g_3 und ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 auszudrücken.

170.) Es fehlt uns an Raum, die merkwürdigen Eigenschaften dieser Vectorfunctionen im Einzelnen zu verfolgen, und wir werden uns damit begnügen, eine oder zwei der wichtigsten derselben anzuführen und zu beweisen.

In der Gleichung

$$m\varphi^{-1}V\lambda\mu = V\varphi'\lambda\varphi'\mu \quad (\S\ 145)$$

substituire man λ für $\varphi'\lambda$ und μ für $\varphi'\mu$. Man erhält:

$$mV\varphi'^{-1}\lambda\varphi'^{-1}\mu = \varphi V\lambda\mu.$$

Man verwandele φ in $\varphi + g$, und deshalb φ' in $\varphi' + g$, und m in m_g; es folgt dann:

$$m_g V(\varphi' + g)^{-1}\lambda(\varphi' + g)^{-1}\mu = (\varphi + g)V\lambda\mu;$$

eine Formel von grossem Nutzen.

171.) Aus § 147 folgt:

$$\frac{m_g}{g}S.\varrho(\varphi + g)^{-1}\varrho = \frac{m}{g}S\varrho\varphi^{-1}\varrho + S\varrho\chi\varrho + g\varrho^2,$$

und

$$\frac{m_h}{h}S.\varrho(\varphi + h)^{-1}\varrho = \frac{m}{h}S\varrho\varphi^{-1}\varrho + S\varrho\chi\varrho + h\varrho^2.$$

Hieraus:

$$\frac{m_g}{g}S.\varrho(\varphi + g)^{-1}\varrho - \frac{m_h}{h}S.\varrho(\varphi + h)^{-1}\varrho = (g - h)\left\{\varrho^2 - \frac{mS\varrho\varphi^{-1}\varrho}{gh}\right\},$$

das heisst die Functionen

$$\frac{m_g}{g}S.\varrho(\varphi + g)^{-1}\varrho \quad \text{und} \quad \frac{m_h}{h}S.\varrho(\varphi + h)^{-1}\varrho$$

sind identisch, d. h. einer Constanten gleichgesetzt stellen sie dieselbe Reihe von Oberflächen dar nicht allein, wenn

$$g = h,$$

sondern auch bei beliebigen g und h, wenn sie Scalarfunctionen sind, welche der Bedingung genügen

$$mS.\varrho\varphi^{-1}\varrho = gh\varrho^2.$$

Es ist dies eine Verallgemeinerung Hamilton's von einem speciellen Falle, den der Verfasser untersuchte*).

172.) Die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} S.\varrho(\varphi+g)^{-1}\varrho &= 0 \\ S.\varrho(\varphi+h)^{-1}\varrho &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

sind gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned} mS\varrho\varphi^{-1}\varrho + gS\varrho\chi\varrho + g^2\varrho^2 &= 0, \\ mS\varrho\varphi^{-1}\varrho + hS\varrho\chi\varrho + h^2\varrho^2 &= 0. \end{aligned}$$

Hieraus:

$$m(1-x)S\varrho\varphi^{-1}\varrho + (g-hx)S\varrho\chi\varrho + (g^2-h^2x)\varrho^2 = 0$$

für jede beliebige Scalar x. Das heisst, die beiden Gleichungen (1) stellen *dieselbe* Fläche dar, wenn diese Identität erfüllt ist.

Als specielle Fälle nehmen wir:

(1) $$x = 1,$$

dann ist $$S\varrho^{-1}\chi\varrho + g + h = 0.$$

(2) $$g - hx = 0,$$

dann ist $$m\left(1-\frac{g}{h}\right)S\varrho^{-1}\varphi^{-1}\varrho + \left(g^2 - h^2\frac{g}{h}\right) = 0,$$

oder $$mS\varrho^{-1}\varphi^{-1}\varrho - gh = 0.$$

(3) $$x - \frac{g^2}{h^2}$$

liefert $$m\left(1-\frac{g^2}{h^2}\right)S\varrho\varphi^{-1}\varrho + \left(g - h\frac{g^2}{h^2}\right)S\varrho\chi\varrho = 0,$$

oder $$m(h+g)S\varrho\varphi^{-1}\varrho + ghS\varrho\chi\varrho = 0.$$

173.) In verschiedenen Untersuchungen tritt die Quaternion auf:

$$q = \alpha\varphi\alpha + \beta\varphi\beta + \gamma\varphi\gamma,$$

wo α, β, γ drei aufeinander senkrecht stehende Einheits-Vectoren sind.

Man kann diesen Ausdruck auf eine sehr einfache Form bringen, die unter Umständen von sehr grosser Wichtigkeit ist.

Aus den Eigenschaften eines rechtwinkligen Einheits-Systems folgt:

$$q = \beta\gamma\varphi\alpha + \gamma\alpha\varphi\beta + \beta\alpha\varphi\gamma.$$

Da nun $$S.\alpha\beta\gamma = -1 \quad [\S\ 71\ (13)],$$

so zeigt ein Blick auf die Formel des § 147, dass

$$Sq = -m_2,$$

---

*) Bemerkung über die Cartesische Gleichung der Wellenfläche. *Quarterly Math. Journal*, Oct. 1859.

wenigstens wenn φ selbstconjugirt ist. Selbst wenn φ diese Eigenschaft nicht hat, so ist (wie wir in § 174 zeigen werden)

$$\varphi\varrho = \varphi'\varrho + V\varepsilon\varrho,$$

und das neue Glied verschwindet in Sq.

Nach § 90 haben wir auch:

$$\begin{aligned} Vq &= \alpha(S\beta\varphi\gamma - S\gamma\varphi\beta) + \beta(S\gamma\varphi\alpha - S\alpha\varphi\gamma) + \gamma(S\alpha\varphi\beta - S\beta\varphi\alpha) \\ &= \alpha S\beta(\varphi - \varphi')\gamma + \beta S\gamma(\varphi - \varphi')\alpha + \gamma S\alpha(\varphi - \varphi')\beta \\ &= \alpha S.\beta\varepsilon\gamma + \beta S.\gamma\varepsilon\alpha + \gamma S.\alpha\varepsilon\beta \\ &= -(\alpha S\alpha\varepsilon + \beta S\beta\varepsilon + \gamma S\gamma\varepsilon) = \varepsilon. \end{aligned}$$

[Wir wollen beiläufig bemerken, dass diese Quaternion auf folgende merkwürdige Form gebracht werden kann:

$$\nabla\varphi\varrho,$$

wo $$\nabla = \alpha\frac{d}{dx} + \beta\frac{d}{dy} + \gamma\frac{d}{dz};$$

und $$\varrho = \alpha x + \beta y + \gamma z.$$

Wir werden gegen Ende des Werkes hierauf zurückkommen.]

Manche ähnliche, merkwürdige Eigenschaften von φ, die mit einem rechtwinkligen System zusammenhängen, lassen sich leicht herleiten. Zum Beispiel:

$$\begin{aligned} &V(\alpha V\varphi\beta\varphi\gamma + \beta V\varphi\gamma\varphi\alpha + \gamma V\alpha\varphi\beta) \\ &\quad = mV(\alpha\varphi'^{-1}\alpha + \beta\varphi'^{-1}\beta + \gamma\varphi'^{-1}\gamma) = mV.\nabla\varphi'^{-1}\varrho = \varphi\varepsilon. \end{aligned}$$

Der Leser kann die Richtigkeit dieses Ausdruckes durch ein ähnliches Verfahren, wie das eben befolgte, nachweisen, oder noch direkter mit Hilfe von § 145 (4). Einige andere jener Eigenschaften wird man in den Uebungsaufgaben finden, die diesem Kapitel beigegeben sind.

174.) Da wir in manchen der vorhergehenden Untersuchungen vorausgesetzt haben, dass φ selbstconjugirt sei, so wollen wir zum Schluss bemerken, dass man auf sehr einfache Weise von dieser Form zu der nicht-selbstconjugirten übergehen kann.

Denn, ist φ' conjugirt zu φ, so hat man:

$$S\varrho\varphi'\sigma = S\sigma\varphi\varrho,$$

und auch $$S\varrho\varphi\sigma = S\sigma\varphi'\varrho.$$

Addirt man, so folgt:

$$S\varrho(\varphi + \varphi')\sigma = S\sigma(\varphi + \varphi')\varrho;$$

so dass die Function $(\varphi + \varphi')$ selbstconjugirt ist.

Weiter $$S\varrho\varphi\varrho = S\varrho\varphi'\varrho;$$

dies liefert $$S\varrho(\varphi - \varphi')\varrho = 0$$

Hieraus $$(\varphi - \varphi')\varrho = V\varepsilon\varrho,$$
wo ε, wenn φ nicht selbstconjugirt ist, ein bestimmter reeller Vector ist, und deshalb:

$$\varphi\varrho = \tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi')\varrho + \tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi')\varrho$$
$$= \tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi')\varrho + \tfrac{1}{2}V\varepsilon\varrho.$$

Also: *jede nichtconjugirte lineare Vectorfunction unterscheidet sich von einer conjugirten Function nur durch ein Glied von der Form*

$$V\varepsilon\varrho.$$

Die geometrische Bedeutung hiervon wird man in dem Kapitel über Kinematik finden.

175.) Wir haben nun ziemlich weitläufig gezeigt, wie eine lineare Vectorgleichung, die einen unbekannten *Vector* enthält, in dem allgemeinsten Fall gelöst werden kann; und nach § 138 erlaubt dies, eine unbekannte *Quaternion* zu bestimmen aus jeder hinreichend allgemeinen linearen Gleichung, die dieselbe enthält. Soll eine derartige Gleichung allgemein genug sein, so muss sie sowohl einen Scalar- als auch einen Vectortheil haben; der erste liefert *eine* Scalargleichung, der zweite deren *drei*; und diese sind nothwendig, um die vier Scalarelemente der unbekannten Quaternion zu bestimmen.

176.) So liefert $$Tq = a,$$
da es nur eine Scalargleichung ist,
$$q = aUr,$$
wo r eine beliebige Quaternion bedeutet.

Dem entsprechend gibt $$Sq = a,$$
$$q = a + \vartheta,$$
wo ϑ ein beliebiger Vector ist. Da in jedem dieser Fälle nur eine Scalargleichung gegeben ist, so enthält die Lösung drei unbestimmte Scalaren. Eine ähnliche Bemerkung hat Bezug auf das Folgende:

$$TVq = a$$
gibt $$q = x + a\vartheta,$$
und $$SUq = \cos\alpha$$
liefert $$q = x\vartheta^{\frac{2\alpha}{\pi}}.$$
In diesen beiden Ausdrücken ist x eine beliebige Scalar und ϑ ein beliebiger Einheits-Vector.

177.) Der Leser kann leicht nachweisen, dass
$$V.\alpha Vq = \beta,$$
wo α ein gegebener Vector ist,
liefert $$V\alpha q = \beta + x\alpha,$$
wenn man setzt $$Sq = x.$$

Nehmen wir an $$S\alpha q = y,$$

so folgt $$\alpha q = y + x\alpha + \beta,$$

oder $$q = x + y\alpha^{-1} + \alpha^{-1}\beta.$$

Da die gegebene Gleichung äquivalent ist mit zwei Scalarbedingungen, so enthält die Lösung zwei unbestimmte Scalaren.

178.) Nehmen wir die Gleichung

$$V\alpha q = \beta.$$

Operirt man mit $S.\alpha^{-1}$, so folgt:

$$Sq = S\alpha^{-1}\beta,$$

sodass die gegebene Gleichung wird:

$$V\alpha(S\alpha^{-1}\beta + Vq) = \beta,$$

oder $$V\alpha Vq = \beta - \alpha S\alpha^{-1}\beta = \alpha V\alpha^{-1}\beta.$$

Hieraus folgt nach § 158:

$$Vq = \alpha^{-1}(x + \alpha V\alpha^{-1}\beta),$$

und $$q = S\alpha^{-1}\beta + \alpha^{-1}(x + \alpha V\alpha^{-1}\beta)$$
$$= \alpha^{-1}(\beta + x).$$

Da die gegebene Gleichung mit drei Scalarbedingungen äquivalent war, so bleibt nur eine unbestimmte Scalar in dem Werthe von q.

Diese Lösung konnte man unmittelbar erhalten, da unsere Gleichung nur den *Vector* der Quaternion αq liefert, und die Scalar derselben unbestimmt lässt.

Nehmen wir x zu dieser Scalar, so haben wir:

$$\alpha q = S\alpha q + V\alpha q$$
$$= x + \beta.$$

179.) Zum Schluss nehmen wir

$$\alpha q = \beta.$$

Da dies mit vier Scalargleichungen äquivalent ist, so erhalten wir einen bestimmten Werth der unbekannten Quaternion in der Form:

$$q = \alpha^{-1}\beta.$$

180.) Ehe wir die linearen Gleichungen verlassen, wollen wir anführen, dass Hamilton gezeigt hat, wie man eine lineare Gleichung, die eine unbekannte *Quaternion* enthält, auflösen kann durch ein ähnliches Verfahren wie das, welches wir anwandten, um einen unbekannten *Vector* aus einer linearen Vectorgleichung zu bestimmen.

Die Rechnungen werden natürlich viel verwickelter, aber das Merkwürdigste an dieser schönen Entdeckung ist, dass die symbolische Gleichung, die der cubischen Gleichung in φ des § 162 entspricht, eine *biquadratische* ist; die reciproke Function wird also

ausgedrückt durch die erste, zweite und dritte Potenz der direkten Function. In einem elementaren Werke wie dieses wäre die Discussion einer solchen Frage nicht am Platze, obgleich es nicht sehr schwer wäre, dies allgemeine Resultat herzuleiten durch Anwendung von Methoden, die schon dargelegt wurden.

Es ist dies ein merkwürdiges Beispiel der wohlbekannten Thatsache, dass die Lösung einer biquadratischen Gleichung abhängt von der Lösung einer cubischen Gleichung. Wir verweisen den Leser auf die *Elements of Quaternions* p. 491.

181.) Die Lösung der folgenden, oft auftretenden speciellen Form der linearen Quaternionengleichung

$$aq + qb = c,$$

wo a, b, c beliebige gegebene Quaternionen sind, hat Hamilton durch ein geistreiches Verfahren erhalten. (Wir wandten dasselbe in § 133 (5) auf einen einfachen Fall an.)

Man multiplicire auf beiden Seiten *mit* Ka und *in* b *hinein*, dann folgt:

$$T^2a \,.\, q + Ka \,.\, qb = Ka \,.\, c,$$

und

$$aqb + qb^2 = cb,$$

durch Addition $q(T^2a + b^2 + 2Sa \,.\, b) = Ka \,.\, c + cb,$

und hiermit ist q gegeben.

Auf diese Form kann jede Gleichung wie

$$a'qb' + c'qd' = e'$$

zurückgeführt werden durch Multiplication *durch* c'^{-1} und *in* b'^{-1} hinein.

182.) Als weiteres Beispiel wollen wir das Differential der dritten Wurzel einer Quaternion aufsuchen.

Es sei

$$q^3 = r,$$

dann folgt:

$$q^2dq + qdq \,.\, q + dq \,.\, q^2 = dr.$$

Man multiplicire *mit* q und *in* q^{-1} hinein, gleichzeitig, und es folgt:

$$q^3dq \,.\, q^{-1} + q^2dq + qdq \,.\, q = qdr \,.\, q^{-1}.$$

Zieht man dies von der obigen Gleichung ab, so erhält man:

$$dq \,.\, q^2 - q^3dq \,.\, q^{-1} = dr - qdr \,.\, q^{-1},$$

oder

$$dq \,.\, q^3 - q^3dq = dr \,.\, q - qdr,$$

und hieraus kann dq oder $d(r^{\frac{1}{3}})$ nach dem obigen Verfahren gefunden werden.

Diese Methode kann leicht angewandt werden, um das Differential einer beliebigen Wurzel einer Quaternion zu bestimmen.

183.) Um einige der charakteristischen Eigenthümlichkeiten

einer Quaternionengleichung, die nicht allgemein genug ist, zu zeigen, wählen wir das einfache Beispiel der Gleichung ersten Grades

$$aq = qb.$$

Wir führen die Rechnung vollkommen durch als Uebung für die Transformationen.

Wir wenden das Hamilton'sche Verfahren an (§ 181) und erhalten:

$$T^2a \,.\, q = Ka \,.\, qb,$$

$$qb^2 = aqb.$$

Hieraus $$q(T^2a + b^2 - 2bSa) = 0.$$

Die Gleichung liefert also keinen reellen Werth für q, wenn nicht

$$T^2a + b^2 - 2bSa = 0$$

oder $$b = Sa + \beta TVa,$$

wo β ein Einheits-Vector ist.

Durch ein ähnliches Verfahren erhält man

$$a = Sb + \alpha TVb.$$

Nun ist nach der gegebenen Gleichung

$$Ta = Tb$$

oder $$S^2a + T^2Va = S^2b + T^2Vb;$$

hieraus und aus den obigen Werthen von a und b erhält man

$$\frac{Sa}{TVa} = \frac{Sb}{TVb} = \mathrm{a},$$

wie wir dies bezeichnen wollen.

Zerlegen wir q in seinen Scalar- und Vectortheil, also

$$q = r + \varrho,$$

so wird die gegebene Gleichung:

$$(\mathrm{a} + \alpha)(r + \varrho) = (r + \varrho)(\mathrm{a} + \beta) \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Multiplicirt man aus, so folgt:

$$r(\alpha - \beta) = \varrho\beta - \alpha\varrho,$$

hieraus $$S(\alpha - \beta)\varrho = 0$$

und $$\varrho = V\gamma(\alpha - \beta),$$

wo γ ein unbestimmter Vector ist.

Wir haben nun

$$\begin{aligned} r(\alpha - \beta) &= \varrho\beta - \alpha\varrho \\ &= V\gamma(\alpha - \beta) \,.\, \beta - \alpha V\gamma(\alpha - \beta) \\ &= \gamma(S\alpha\beta + 1) - (\alpha - \beta)S\beta\gamma + \gamma(1 + S\alpha\beta) - (\alpha - \beta)S\alpha\gamma \\ &= (\alpha - \beta)\, S(\alpha + \beta)\gamma \,. \end{aligned}$$

Da r auf diese Weise bestimmt ist, haben wir:

$$q = -S(\alpha+\beta)\gamma + V\gamma(\alpha-\beta)$$
$$2q = -(\alpha+\beta)\gamma - \gamma(\alpha+\beta) + \gamma(\alpha-\beta) - (\alpha-\beta)\gamma$$
$$= -2\alpha\gamma - 2\gamma\beta.$$

Wir können nun das Vorzeichen von γ ändern und die Lösung von

$$\alpha q = q b$$

schreiben

$$q = \alpha\gamma + \gamma\beta,$$

wo γ ein beliebiger Vector ist, und

$$\alpha = UVa, \qquad \beta = UVb.$$

Um die Richtigkeit dieser Lösung nachzuweisen, haben wir nach (1) nur zu zeigen, dass

$$\alpha q = q\beta;$$

aber der gemeinschaftliche Werth ist offenbar

$$-\gamma + \alpha\gamma\beta.$$

Es ist eine sehr gute Uebung für den Leser, die Glieder dieser Gleichung durch Versorbögen darzustellen, wie in § 54, und obige Lösung direkt aus der Figur abzuleiten.

Die Lösung ergibt sich auf diese Weise fast unmittelbar aus der Anschauung.

184.) Eine allgemeine Methode, Quaternionengleichungen zweiten oder höhern Grades aufzulösen, ist bis jetzt nocht nicht gefunden worden. Wir werden jetzt zeigen, dass schon die Gleichungen zweiten Grades in ihrer allgemeinsten Form auf eine algebraische Gleichung *sechszehnten* Grades führen. Wir werden uns deshalb darauf beschränken, in den paar Schlussparagraphen das Verfahren anzugeben, welches für einfache Fälle aufgefunden wurde. Zuerst aber wollen wir untersuchen, wie viele Wurzeln eine Gleichung haben muss, die zweiten Grades ist, in Bezug auf eine unbekannte Quaternion.

Setzen wir an Stelle der Quaternion den Ausdruck

$$w + ix + jy + kz \quad (\S\ 80)$$

und behandeln die Quaternionenconstanten auf dieselbe Weise, so werden wir zur Bestimmung von w, x, y, z vier Gleichungen erhalten, die im allgemeinen zweiten Grades sind. Die Zahl der Wurzeln wird deshalb 2^4 oder sechszehn sein. Eine ähnliche Ueberlegung zeigt, dass eine Quaternionengleichung $m$ten Grades m^4 Wurzeln hat. Man wird aber leicht einsehen, nach einigen der einfachern Beispiele, die oben (§§ 175—178) gegeben wurden, dass, wenn die Gleichung nicht mit vier Scalargleichungen äquivalent ist, die Lösungen eine oder mehrere unbestimmte Grössen enthalten werden.

185.) Hamilton hat auf einfache Weise folgende quadratische Gleichung gelöst:

$$q^2 = qa + b,$$

oder die folgende, die eigentlich dieselbe ist (man nehme die Conjugirte auf beiden Seiten),

$$q^2 = aq + b.$$

Er setzt: $$q = \tfrac{1}{2}(a + w + \varrho),$$

wo w eine Scalar, ϱ einen Vector bedeutet.

Führt man diesen Werth in die erste Gleichung ein, so folgt:

$$a^2 + (w+\varrho)^2 + 2wa + a\varrho + \varrho a = 2(a^2 + wa + \varrho a) + 4b$$

oder $$(w+\varrho)^2 + a\varrho - \varrho a = a^2 + 4b.$$

Setzen wir

$$Va = \alpha, \qquad S(a^2 + 4b) = c, \qquad V(a^2 + 4b) = 2\gamma,$$

so erhalten wir:

$$(w+\varrho)^2 + 2V\alpha\varrho = c + 2\gamma;$$

setzt man getrennt die entsprechenden Scalar- und Vectortheile einander gleich, so erhält man die beiden Gleichungen

$$w^2 + \varrho^2 = c,$$

$$V(w+\alpha)\varrho = \gamma.$$

Die letztere kann nach ϱ aufgelöst werden durch das Verfahren des § 156, oder einfacher, indem man mit $S.\alpha$ operirt: man erhält dann den Werth von $S(w+\alpha)\varrho$. Substituiren wir den erhaltenen Werth von ϱ in die erste Gleichung, so erhalten wir die Gleichung, deren Richtigkeit man leicht nachweisen kann:

$$(w^2 - \alpha^2)(w^4 - cw^2 + \gamma^2) - (V\alpha\gamma)^2 = 0.$$

Die Auflösung dieser cubischen Scalargleichung liefert sechs Werthe für w, deren jedem ein ϱ entspricht, und demnach auch ein q. Hamilton zeigt (Lectures p. 633), dass nur zwei dieser Werthe reelle Quaternionen sind, die übrigen vier sind Biquaternionen und die übrigen zehn Wurzeln der Gleichung sind unendlich gross.

Hamilton macht darauf aufmerksam, Lectures p. 633, dass obiges Verfahren, wie man leicht sieht, zur Auflösung der beiden gleichzeitig bestehenden Gleichungen

$$q + r = a$$

$$qr = -b$$

führt; er stützt sich auch auf dasselbe Verfahren, um den Werth gewisser Kettenbrüche zu bestimmen, in die Quaternionen eingehen. (Man sehe die gemischten Beispiele am Ende des Werkes.)

186.) Die Gleichung

$$q^2 = aq + qb,$$

obwohl dem Anscheine nach vom zweiten Grade, kann leicht auf den ersten Grad gebracht werden, indem man *durch* und *in* q^{-1} multiplicirt. Man erhält

$$1 = q^{-1}a + bq^{-1},$$

und diese Gleichung kann dann nach dem Verfahren des § 181 behandelt werden.

187.) Die Gleichung

$$q^m = aqb$$

wo a und b gegebene Quaternionen sind, gibt

$$q(aqb) = (aqb)q,$$

und nach § 54 folgt hieraus, dass die Ebenen von q und aqb zusammenfallen müssen. Eine kurze Ueberlegung zeigt, dass die Lösung auf die Aufgabe zurückgeführt ist, zwei Bögen zu ziehen, die bestimmte Bögen auf zwei grössten Kreisen abschneiden; der eine dieser Bögen theilt den andern in zwei gleiche Theile und wird von ihm getheilt im Verhältniss von $m : 1$.

Uebungsbeispiele zu Kapitel V.

1. Man löse die folgenden Gleichungen:

(*a*) $V.\alpha\varrho\beta = V.\alpha\gamma\beta.$

(*b*) $\alpha\varrho\beta\varrho = \varrho\alpha\varrho\beta.$

(*c*) $\alpha\varrho + \varrho\beta = \gamma.$

(*d*) $S.\alpha\beta\varrho + \beta S\alpha\varrho - \alpha V\beta\varrho = \gamma.$

(*e*) $\varrho + \alpha\varrho\beta = \alpha\beta.$

(*f*) $\alpha\varrho\beta\varrho = \varrho\beta\varrho\alpha.$

Sind hierunter welche, die die Allgemeinheit von α und β beschränken?

2. Es sei $$\varrho = ix + jy + kz$$

und $$\varphi\varrho = aiSi\varrho + bjSj\varrho + ckSk\varrho.$$

Man drücke durch Cartesische Coordinaten folgende Gleichungen aus:

(*a*) $T\varphi\varrho = 1.$

(*b*) $S\varrho\varphi^2\varrho = -1.$

(*c*) $S.\varrho(\varphi^2 - \varrho^2)^{-1}\varrho = -1.$

(*d*) $T\varrho = T.\varphi U\varrho.$

3. Es seien λ, μ, ν drei *beliebige* nicht complanare Vectoren, und

$$q = V\mu\nu.\varphi\lambda + V\nu\lambda.\varphi\mu + V\lambda\mu.\varphi\nu.$$

Man zeige, dass q dividirt wird durch $S.\lambda\mu\nu$.

Man zeige weiter, dass der Quotient ist

$$m_2 - 2\varepsilon,$$

wo $V\varepsilon\varrho$ der nicht commutative Theil von $\varphi\varrho$ ist.

Hamilton, Elements p. 442.

4. Man löse die Simultangleichungen:

$$(a)\quad \left.\begin{aligned} S.\alpha\varrho &= 0,\\ S.\alpha\varrho\varphi\varrho &= 0. \end{aligned}\right\}$$

$$(b)\quad \left.\begin{aligned} S\alpha\varrho &= 0,\\ S\varrho\varphi\varrho &= 0. \end{aligned}\right\}$$

$$(c)\quad \left.\begin{aligned} S\alpha\varrho &= 0,\\ S.\alpha\iota\varrho\varkappa\varrho &= 0. \end{aligned}\right\}$$

5. Es sei $\varphi\varrho = \Sigma\beta S\alpha\varrho + Vr\varrho,$

wo r eine gegebene Quaternion ist. Man zeige, dass

$$m = \Sigma(S.\alpha_1\alpha_2\alpha_3 S.\beta_3\beta_2\beta_1) + \Sigma S(r V\alpha_1\alpha_2 . V\beta_2\beta_1) + Sr\Sigma S.\alpha\beta r - \Sigma(S\alpha r S\beta r) + Sr Tr^2,$$

und

$$m\varphi^{-1}\sigma = \Sigma(V\alpha_1\alpha_2 S.\beta_2\beta_1\sigma) + \Sigma V.\alpha V(V\beta\sigma . r) + V\sigma r Sr - Vr S\sigma r.$$

Lectures p. 561.

6. Wir führen die Bezeichnung ein:

$[pq]$ für $pq - qp,$

(pqr) „ $S.p[qr],$

$[pqr]$ „ $(pqr) + [rq]Sp + [pr]Sq + [qp]Sr,$

$(pqrs)$ „ $S.p[qrs].$

Man zeige, dass folgende Relationen bestehen zwischen beliebigen fünf Quaternionen:

$$0 = p(qrst) + q(rstq) + r(stpq) + s(tpqr) + t(pqrs),$$

und

$$q(prst) = [rst]Spq - [stp]Srq + [tpr]Ssq - [prs]Stq.$$

Elements p. 492.

7. Es seien φ, ψ beliebige lineare Vectorfunctionen, α, β, γ rechtwinklige Einheits-Vectoren. Man zeige, dass der Vector

$$\vartheta = V(\varphi\alpha\psi\alpha + \varphi\beta\psi\beta + \varphi\gamma\psi\gamma)$$

eine Invariante ist. [Man sieht dies unmittelbar, wenn man den Ausdruck auf die Form bringt:

$$\vartheta = V.\varphi\nabla\psi\varrho,$$

denn diese ist unabhängig von den Richtungen von α, β, γ. Es ist aber eine gute Uebung dieses nachzuweisen, ohne von ∇ Gebrauch zu machen.]

Wenn $$\varphi\varrho = \Sigma\eta S\xi\varrho$$
und $$\psi\varrho = \Sigma\eta_1 S\xi_1\varrho,$$
so kann die Invariante ausgedrückt werden als
$$-\Sigma V\eta\psi\xi \quad \text{oder} \quad \Sigma V\eta_1\varphi\xi_1.$$
Man zeige weiter, dass
$$\varrho\psi'\varrho - \psi\varphi'\varrho = V\vartheta\varrho.$$
Die Scalar derselben Quaternion ist ebenfalls eine Invariante und kann geschrieben werden als
$$\begin{aligned} &-\Sigma\Sigma_1 S\eta\eta_1 S\xi\xi_1, \\ =&-\Sigma S\eta\psi\xi, \\ =&-\Sigma_1 S\eta_1\psi\xi_1. \end{aligned}$$

8. Es sei $$\varphi\varrho = \alpha S\alpha\varrho + \beta S\beta\varrho + \gamma S\gamma\varrho,$$
wo α, β, γ drei beliebige Vectoren sind. Man zeige, dass
$$-\varphi^{-1}\varrho S^2.\alpha\beta\gamma = \alpha_1 S\alpha_1\varrho + \beta_1 S\beta_1\varrho + \gamma_1 S\gamma_1\varrho,$$
wo $$\alpha_1 = V\beta\gamma \quad \text{u. s. w.}$$

9. Man soll nachweisen, dass jede selbstconjugirte lineare Vectorfunction ausgedrückt werden kann durch zwei gegebene Functionen; in dem Ausdrucke treten Glieder zweiten Grades auf. Man zeige weiter, dass man schreiben kann:
$$\varphi + z = a(\varpi + x)^2 + b(\varpi + x)(\omega + y) + c(\omega + y)^2,$$
wo a, b, c, x, y, z Scalaren sind und ϖ und ω die zwei gegebenen Functionen.

Welcher Grad der Allgemeinheit ist nöthig in ϖ und ω? Wie ändert sich die Lösung, wenn die eine der Functionen oder beide nicht selbstconjugirt sind?

10. Man löse die Gleichungen:
$$\begin{aligned} (a) \quad & q^2 = 5qi + 10j. \\ (b) \quad & q^2 = 2q + i. \\ (c) \quad & qaq = bq + c. \\ (d) \quad & aq = qr = rb. \end{aligned}$$

11. Man zeige, dass
$$\varphi V\nabla\varphi\varrho = mV\nabla\varphi^{-1}\varrho.$$

12. Wenn φ selbstconjugirt ist und α, β, γ ein rechtwinkliges System, dann ist
$$S.V\alpha\varphi\alpha V\beta\varphi\beta V\gamma\varphi\gamma = 0.$$

13. $\varphi\psi$ und $\psi\varphi$ geben denselben Werth der Invarianten m, m_1, m_2.

14. Wenn φ', φ conjugirt ist, dann ist $\varphi\varphi'$ selbstconjugirt.

15. Man zeige, dass

$$(V\alpha\vartheta)^2 + (V\beta\vartheta)^2 + (V\gamma\vartheta)^2 = 2\vartheta^2,$$

wenn α, β, γ rechtwinklige Einheits-Vectoren sind.

16. Man beweise, dass

$$\nabla^2(\varphi - g)\varrho = -\varrho\nabla^2 g + 2\nabla g.$$

17. Man löse folgende Gleichungen:

$$(a) \qquad \varphi^2 = \varpi,$$

$$(b) \quad \left.\begin{aligned} \varphi + \chi &= \varpi, \\ \varphi\chi &= \vartheta; \end{aligned}\right\}$$

wo eine oder zwei unbekannte lineare Vectorfunctionen ausgedrückt werden durch bekannte Functionen. (Tait, Proc. R. S. E. 1870—71.)

18. φ sei eine selbstconjugirte lineare Vectorfunction, ξ und η zwei Vectoren; dann ist die eine der folgenden Gleichungen eine Folge der andern:

$$\frac{\xi}{S^{\frac{1}{3}}.\xi\varphi\xi\varphi^2\xi} = \frac{V\eta\varphi\eta}{S^{\frac{2}{3}}.\eta\varphi\eta\varphi^2\eta}$$

$$\frac{\eta}{S^{\frac{1}{3}}.\eta\varphi\eta\varphi^2\eta} = \frac{V\xi\varphi\xi}{S^{\frac{2}{3}}.\xi\varphi\xi\varphi^2\xi}.$$

Aus jeder derselben erhalten wir:

$$S\varphi\xi\varphi\eta = S^{\frac{1}{3}}.\xi\varphi\xi\varphi^2\xi\, S^{\frac{1}{3}}.\eta\varphi\eta\varphi^2\eta.$$

Dies mit einer der andern Gleichungen zusammen gibt einen merkwürdigen Satz, wenn man es in die gewöhnliche Algebra überträgt.

Welche Eigenschaft der Fläche

$$S.\varrho\varphi\varrho\varphi^2\varrho = 1$$

spricht es aus?

Kapitel VI.

Geometrie der Geraden und der Ebene.

188.) Nachdem wir in den fünf ersten Kapiteln einen kurzen Abriss der Theorie und der Eigenschaften der Quaternionen gegeben haben, wollen wir uns von jetzt ab mit deren praktischer Anwendung beschäftigen, und beginnen mit der einfachsten Curve und Fläche, mit der Geraden und der Ebene.

In diesem und den folgenden Kapiteln werden wir einige der schon früher behandelten Beispiele in allen Einzelheiten ausarbeiten, und bei den Umformungen auf die fünf ersten Kapitel verweisen; wie wir aber weiter fortschreiten, werden wir allmälig die überflüssigen Zwischenrechnungen weglassen, und in den letzten Beispielen wird der volle Werth der Quaternionen-Rechnung zur Geltung kommen.

189.) Ehe wir zu der eigentlichen Aufgabe dieses Abschnittes übergehen, wollen wir einige Beispiele geben, wie man die Quaternionen auf die gewöhnliche Geometrie der Ebene anwenden kann. Der Leser kann leicht eine grössere Anzahl solcher Beispiele behandeln.

(a) Euclid I, 5. α und β seien die Vectorseiten eines gleichschenkligen Dreiecks; $\beta - \alpha$ die Basis und $T\alpha = T\beta$.

Der Satz ist bewiesen, wenn wir zeigen, dass

$$\alpha(\alpha - \beta)^{-1} = K\beta(\beta - \alpha)^{-1} \quad (\S\ 52),$$

dies liefert

$$\alpha(\alpha - \beta)^{-1} = (\beta - \alpha)^{-1}\beta,$$

oder

$$(\beta - \alpha)\alpha = \beta(\alpha - \beta),$$

oder

$$-\alpha^2 = -\beta^2.$$

(b) Euklid I, 32. ABC sei ein Dreieck, und es sei

$$U\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \gamma^l,$$

wo γ ein Einheits-Vector ist, senkrecht auf der Ebene des Dreiecks.

Wenn $l = 1$, so ist der Winkel CAB ein rechter (§ 74). Dem-

nach ist $A = l\frac{\pi}{2}$ (§ 74). Es sei nun $B = m\frac{\pi}{2}$, $C = n\frac{\pi}{2}$. Dann hat man:

$$U\overline{AC} = \gamma^l U\overline{AB},$$
$$U\overline{CB} = \gamma^n U\overline{CA},$$
$$U\overline{BA} = \gamma^m U\overline{BC};$$

folglich: $U\overline{BA} = \gamma^m . \gamma^n . \gamma^l U\overline{AB},$

oder $-1 = \gamma^{l+m+n};$

das heisst $l + m + n = 2,$

oder $A + B + C = \pi.$

Im Grunde ist dies Legendre's Beweis, und hätte viel kürzer gegeben werden können.

Wir haben in der That für drei beliebige Vectoren:

$$U \cdot \frac{\alpha}{\beta}\frac{\beta}{\gamma}\frac{\gamma}{\alpha} = 1,$$

und dies enthält den Satz Euclid's als speciellen Fall.

(*c*) Euclid I, 35. Es sei β die gemeinschaftliche Vectorbasis der Parallelogramme, α die Vectorseite irgend eines derselben, die von dem gemeinschaftlichen Endpunkte der Basis ausgeht. Für ein beliebiges anderes Parallelogramm ist diese Vectorseite $\alpha + x\beta$ (§ 28) und der zu beweisende Satz ist

$$TV\beta(\alpha + x\beta) = TV\beta\alpha \quad (\S\S\ 96, 98),$$

und dies ist in der That der Fall.

(*d*) Auf der Basis eines Dreiecks soll ein Punkt bestimmt werden, so gelegen, dass Gerade, welche von hier ausgehen, den Seiten parallel sind und durch dieselben begrenzt werden, gleiche Länge haben.

Sind α, β diese Seiten, so hat jeder Punkt der Basis den Vector

$$\varrho = (1 - x)\alpha + x\beta.$$

Für den gesuchten Punkt ist

$$(1 - x)T\alpha = xT\beta,$$

dies bestimmt x.

Der Punkt liegt also auf der Geraden

$$\varrho = y(U\alpha + U\beta),$$

welche den Verticalwinkel des Dreiecks halbirt.

Es ist dies nicht die einzige Lösung, denn wir hätten setzen müssen

$$T(1 - x)T\alpha = TxT\beta$$

an Stelle der weniger allgemeinen Form, welche stillschweigend annimmt, dass $1 - x$ und x positiv sind.

Wir überlassen dies dem Leser.

(*e*) Errichtet man in den Mittelpunkten der Seiten eines Dreiecks nach aussen hin Senkrechte, und nimmt die Längen derselben proportional diesen Seiten, so fällt der mittlere Punkt des Dreiecks, das durch die Endpunkte dieser Senkrechten gebildet wird, zusammen mit dem mittleren Punkte des gegebenen Dreiecks.

Man suche, in welchem Verhältnisse die Längen jener Senkrechten zu den halben Längen der Seiten stehen müssen, wenn das neue Dreieck ein gleichseitiges sein soll.

Es seien 2α, 2β und $2(\alpha+\beta)$ die Vectorseiten des Dreiecks, i ein Einheits-Vector senkrecht auf der Ebene desselben, e die gegebene Verhältnisszahl. Die Vectoren der Eckpunkte des neuen Dreiecks sind (der 2β gegenüber liegende Eckpunkt sei Coordinatenanfangspunkt):

$$\varrho_1 = \alpha + ei\alpha,$$
$$\varrho_2 = 2\alpha + \beta + ei\beta,$$
$$\varrho_3 = \alpha + \beta - ei(\alpha+\beta).$$

Hieraus: $\frac{1}{3}(\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3) = \frac{1}{3}(4\alpha+2\beta) = \frac{1}{3}(2\alpha+2(\alpha+\beta))$,

und hiermit wäre der erste Theil des Satzes bewiesen.

Die zweite Aufgabe verlangt:

$$T(\varrho_2-\varrho_1) = T(\varrho_3-\varrho_2) = T(\varrho_1-\varrho_3).$$

Substituirt man obige Werthe hierin, entwickelt und lässt die gemeinschaftlichen Glieder herausfallen, so findet man

$$3e^2 = 1.$$

Man sieht hieraus, dass, beschreibt man auf den Seiten eines beliebigen Dreiecks gleichseitige Dreiecke, deren mittlere Punkte ein gleichseitiges Dreieck bilden.

190.) Derartige Anwendungen von Quaternionen haben natürlich ihre Berechtigung, sind aber nicht immer vortheilhaft. In der That, wendet man Quaternionen an auf Aufgaben der ebenen Geometrie, so entarten sie oft zu Scalaren und werden (§. 33) Cartesische Coordinaten der einen oder der andern Art. Man gewinnt also nichts durch deren Gebrauch, es wird aber auch nichts dabei verloren.

Ehe wir diese Klasse von Aufgaben verlassen, wählen wir als weiteres Beispiel die Untersuchung einiger Eigenschaften der Ellipse.

191.) Wir haben schon gesehen [§ 31 (*k*)], dass die Gleichung

$$\varrho = \alpha\cos\vartheta + \beta\sin\vartheta$$

eine Ellipse darstellt; ϑ ist eine Scalar, die einen beliebigen Werth haben kann. Für die Vectortangente am Endpunkte von ϱ erhalten wir hieraus:

$$\varpi = \frac{d\varrho}{d\vartheta} = -\alpha \sin\vartheta + \beta \cos\vartheta;$$

man sieht, dass dies der Werth ist, den ϱ annimmt, wenn ϑ um $\frac{\pi}{2}$ wächst. Es folgt also hieraus, dass je zwei Werthe von ϱ, für welche der Unterschied von ϑ, $\frac{\pi}{2}$ beträgt, conjugirte Durchmesser sind. Der Flächeninhalt des Parallelogramms, welches der Ellipse umschrieben ist, und sie in den Endpunkten dieser Durchmesser berührt, ist demnach nach § 93:

$$4TV\varrho\frac{d\varrho}{d\vartheta} = 4TV(\alpha\cos\vartheta + \beta\sin\vartheta)(-\alpha\sin\vartheta + \beta\cos\vartheta)$$
$$= 4TV\alpha\beta,$$

wie bekannt, eine Constante.

192.) Sollen die conjugirten Durchmesser von gleicher Länge sein, so muss

$$T(\alpha\cos\vartheta + \beta\sin\vartheta) = T(-\alpha\sin\vartheta + \beta\cos\vartheta)$$

oder $$(\alpha^2 - \beta^2)(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) + 4S\alpha\beta\cos\vartheta\sin\vartheta = 0$$

oder $$\operatorname{tang} 2\vartheta = -\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2S\alpha\beta}.$$

Das Quadrat der gemeinsamen Länge dieser Durchmesser ist

$$-\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2},$$

denn wir sehen aus § 191, dass die Summe der Quadrate von conjugirten Durchmessern constant ist.

193.) Das Maximum oder Minimum von ϱ findet man auf folgende Weise:

$$\frac{dT\varrho}{d\vartheta} = -\frac{1}{T\varrho}S\varrho\frac{d\varrho}{d\vartheta}$$
$$= \frac{1}{T\varrho}[-(\alpha^2 - \beta^2)\cos\vartheta\sin\vartheta + S\alpha\beta(\cos^2\vartheta - \beta\sin^2\vartheta)].$$

Für ein Maximum oder Minimum muss dies verschwinden*). Also

$$\operatorname{tang} 2\vartheta = \frac{2S\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2},$$

der längste und der kürzeste Durchmesser sind also gleichviel geneigt gegen jeden der conjugirten Durchmesser; sie stehen also senkrecht aufeinander.

194.) Wir wollen für einen Augenblick annehmen, α und β seien der kleinste und der grösste Halbmesser.

---

*) Es ist von Wichtigkeit zu bemerken, dass wir setzen $\frac{dT\varrho}{d\vartheta} = 0$, und nicht $\frac{d\varrho}{d\vartheta} = 0$. Einige Ueberlegung zeigt, dass die letzte Gleichung keinen Sinn hat.

Die Gleichungen zweier beliebigen Tangenten sind dann

$$\varrho = \alpha \cos\vartheta + \beta \sin\vartheta + x(-\alpha \sin\vartheta + \beta \cos\vartheta)$$
$$\varrho = \alpha \cos\vartheta_1 + \beta \sin\vartheta_1 + x_1(-\alpha \sin\vartheta_1 + \beta \cos\vartheta_1).$$

Sind diese Tangenten senkrecht aufeinander:

$$S(-\alpha \sin\vartheta + \beta \cos\vartheta)(-\alpha \sin\vartheta_1 + \beta \cos\vartheta_1) = 0,$$

oder
$$\alpha^2 \sin\vartheta \sin\vartheta_1 + \beta^2 \cos\vartheta \cos\vartheta_1 = 0.$$

Für den Schnittpunkt erhalten wir, durch Vergleichung der Coefficienten von α und β in obigen Werthen von ϱ:

$$\cos\vartheta - x \sin\vartheta = \cos\vartheta_1 - x_1 \sin\vartheta_1,$$
$$\sin\vartheta + x \cos\vartheta = \sin\vartheta_1 + x_1 \cos\vartheta_1.$$

Zieht man hieraus x, so folgt:

$$T\varrho^2 = -(\alpha^2 + \beta^2),$$

die Gleichung eines Kreises; wir haben hier obige Relation zwischen ϑ und ϑ_1 in Betracht zu ziehen.

Da diese Gleichungen $x = -x_1$ liefern, so sind die Tangenten dieselben Vielfache des ihnen parallelen Durchmessers. Die Gerade, welche die Contactpuncte verbindet, ist also der Geraden parallel, welche die Endpunkte der Durchmesser verbindet.

195.) Wenn die Tangenten

$$\varrho = \alpha \cos\vartheta + \beta \sin\vartheta + x(-\alpha \sin\vartheta + \beta \cos\vartheta),$$
$$\varrho = \alpha \cos\vartheta_1 + \beta \sin\vartheta_1 + x(-\alpha \sin\vartheta_1 + \beta \cos\vartheta_1)$$

sich in einem gegebenen Punkte schneiden, nämlich in

$$\varrho = a\alpha + b\beta,$$

so ist
$$a = \cos\vartheta - x \sin\vartheta = \cos\vartheta_1 - x_1 \sin\vartheta_1,$$
$$b = \sin\vartheta + x \cos\vartheta = \sin\vartheta_1 + x_1 \cos\vartheta_1;$$

hieraus
$$x^2 = a^2 + b^2 - 1 = {x_1}^2;$$

und
$$a \cos\vartheta + b \sin\vartheta = 1 = a \cos\vartheta_1 + b \sin\vartheta_1$$

bestimmen die Werthe von ϑ und x für die Richtung und Länge der beiden Tangenten.

Die Gleichung der Berührungssehne ist:

$$\varrho = y(\alpha \cos\vartheta + \beta \sin\vartheta) + (1 - y)(\alpha \cos\vartheta_1 + \beta \sin\vartheta_1);$$

geht diese durch den Punkt

$$\varrho = p\alpha + q\beta,$$

so folgt:
$$p = y \cos\vartheta + (1 - y) \cos\vartheta_1,$$
$$q = y \sin\vartheta + (1 - y) \sin\vartheta_1;$$

hieraus und aus den Gleichungen, welche ϑ und ϑ_1 bestimmen, erhalten wir:

$$ap + bq = y + 1 - y = 1.$$

Sind also a und b oder p und q gegeben, so besteht immer eine lineare Gleichung zwischen den andern. Nach § 30 gibt dies alle die bekanntesten Eigenschaften der Pole und Polaren.

196.) Obwohl wir in den §§ 28—30 schon einige der Gleichungen der Geraden und der Ebene gegeben haben, so war dies doch nur mit Rücksicht auf die Anwendung auf anharmonische Coordinaten und Transversalen, und nicht für weitergehende Untersuchungen.

Jetzt, da wir die Mittel haben, die Neigung und die Länge von Vectoren zu bestimmen, wollen wir diese und ähnliche Formen von neuem betrachten.

197.) Die Gleichung der unbegrenzten Geraden, welche durch den Anfangspunkt O geht, und den Vector $\overline{OA} = \alpha$ als Theil in sich schliesst, ist offenbar

$$\varrho = x\alpha,$$

oder $$\varrho \parallel \alpha,$$

oder $$V\alpha\varrho = 0,$$

oder $$U\varrho = U\alpha;$$

das charakteristische dieser Gleichungen ist, dass sie linear sind, und dass der Werth von ϱ eine unbestimmte Scalar enthält.

Es wird dies vielleicht deutlicher hervortreten, wenn wir zwei beliebige Vectoren β und γ nehmen, welche mit α ein nicht complanares System bilden. Operiren wir mit $S.V\alpha\beta$ und $S.V\alpha\gamma$ auf irgend eine der obigen Gleichungen, so folgt

$$\left.\begin{aligned} S.\alpha\beta\varrho &= 0 \\ S.\alpha\gamma\varrho &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Getrennt stellen diese Gleichungen die Ebenen dar, welche α, β und α, γ enthalten; zusammengenommen stellen sie die Schnittlinie dieser Ebenen dar.

198.) Um die umgekehrte Aufgabe zu lösen, nämlich ϱ aus den Gleichungen (1) in bekannten Grössen auszudrücken, schreiben wir diese Gleichungen in der Form

$$\left.\begin{aligned} S.\varrho V\alpha\beta &= 0 \\ S.\varrho V\alpha\gamma &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Man sieht, dass ϱ senkrecht steht auf $V\alpha\beta$ und auf $V\alpha\gamma$ und also dem Vector ihres Productes parallel ist. Das heisst:

$$\begin{aligned} \varrho &\parallel V.V\alpha\beta V\alpha\gamma, \\ &\parallel -\alpha S.\alpha\beta\gamma, \end{aligned}$$

oder $$\varrho = x\alpha.$$

199.) Setzen wir $\varrho - \beta$ an Stelle von ϱ, so verlegen wir da-

durch den Anfangspunkt nach einem Punkte B, wo $\overline{OB} = -\beta$, oder $\overline{BO} = \beta$. Die Gleichung einer α parallelen Geraden, die durch den Endpunkt des Vectors β geht, der durch den Anfangspunkt gezogen ist, wird also

$$\varrho - \beta = x\alpha,$$

oder

$$\varrho = \beta + x\alpha.$$

Zwei beliebige parallele Geraden können dargestellt werden durch

$$\varrho = \beta + x\alpha,$$

$$\varrho = \beta_1 + x_1\alpha;$$

oder

$$V\alpha(\varrho - \beta) = 0,$$

$$V\alpha(\varrho - \beta_1) = 0.$$

200.) *Die Gleichung der Geraden aufzustellen, welche durch den Endpunkt von β geht und α unter einem rechten Winkel schneidet.*

Jene Gerade sei parallel mit γ; ihre Gleichung ist dann:

$$\varrho = \beta + x\gamma.$$

Um γ zu bestimmen, wissen wir zunächst, dass es auf α senkrecht steht; dies liefert

$$S\alpha\gamma = 0.$$

Weiter wissen wir, dass α, β, γ in einer Ebene liegen, also

$$S.\alpha\beta\gamma = 0.$$

Diese beiden Gleichungen geben

$$\gamma \parallel V.\alpha V\alpha\beta;$$

hieraus:

$$\varrho = \beta + x\alpha V\alpha\beta.$$

Man kann auf verschiedenen Wegen zu diesem Resultate gelangen. Zum Beispiel:

$$\beta = \alpha^{-1}\alpha\beta = \alpha^{-1}S\alpha\beta + \alpha^{-1}V\alpha\beta.$$

Hieraus sieht man, dass $\alpha^{-1}V\alpha\beta$ (welches offenbar auf α senkrecht steht) mit α und β complanar ist; es ist dies also die Richtung der gesuchten Geraden; die Gleichung derselben ist also

$$\varrho = \beta + y\alpha^{-1}V\alpha\beta,$$

dieselbe wie oben, wenn wir an Stelle von x setzen:

$$\frac{-y}{T\alpha^2}.$$

201.) Wir sehen also, dass

$$-\alpha^{-1}V\alpha\beta$$

das Vectorperpendikel ist, von dem Endpunkte von β gefällt auf die Gerade

$$\varrho = x\alpha.$$

Verlegen wir den Anfangspunkt, so ist

$$-\alpha^{-1}V\alpha(\beta-\gamma),$$

das Vectorperpendikel gefällt vom Endpunkte von β auf die Gerade

$$\varrho=\gamma+x\alpha.$$

202.) Der Vector, welcher B (wo $\overline{OB}=\beta$) mit irgend einem Punkte in $\varrho=\gamma+x\alpha$ verbindet, ist

$$\gamma=x\alpha-\beta.$$

Die Länge desselben ist am kleinsten, wenn

$$dT(\gamma+x\alpha-\beta)=0,$$

oder

$$S\alpha(\gamma+x\alpha-\beta)=0,$$

d. h. wenn er auf α senkrecht steht.

Die letzte Gleichung gibt

$$x\alpha^2+S\alpha(\gamma-\beta)=0,$$

oder

$$x\alpha=-\alpha^{-1}S\alpha(\gamma-\beta).$$

Das Vectorperpendikel ist also

$$\gamma-\beta-\alpha^{-1}S\alpha(\gamma-\beta),$$

oder

$$\alpha^{-1}V\alpha(\gamma-\beta)=-\alpha^{-1}V\alpha(\beta-\gamma),$$

und dies ist in Uebereinstimmung mit den früheren Resultaten.

203.) *Man bestimme die kürzeste Vectorentfernung zwischen zwei Geraden*

$$\varrho=\beta+x\alpha,$$

und

$$\varrho_1=\beta_1+x_1\alpha_1.$$

Man hat zu setzen:

$$dT(\varrho-\varrho_1)=0,$$

oder

$$S(\varrho-\varrho_1)(d\varrho-d\varrho_1)=0,$$

oder

$$S(\varrho-\varrho_1)(\alpha dx-\alpha_1 dx_1)=0.$$

Da x und x_1 von einander unabhängig sind, so zerfällt dies in zwei Bedingungen:

$$S\alpha(\varrho-\varrho_1)=0,$$

$$S\alpha_1(\varrho-\varrho_1)=0;$$

es ist dies der bekannte Satz, dass die gesuchte Gerade auf jeder der gegebenen Geraden senkrecht steht; sie ist also parallel $V\alpha\alpha_1$ und wir haben:

$$\varrho-\varrho_1=\beta+x\alpha-\beta_1-x_1\alpha_1=yV\alpha\alpha_1 \quad \ldots\ldots (1)$$

operirt man hierauf mit $S.\alpha\alpha_1$, so folgt:

$$S.\alpha\alpha_1(\beta-\beta_1)=y(V\alpha\alpha_1)^2.$$

Dies bestimmt y, und die gesuchte kürzeste Entfernung ist:

$$T(\varrho - \varrho_1) = T(yV\alpha\alpha_1) = \frac{TS.\alpha\alpha_1(\beta - \beta_1)}{TV\alpha\alpha_1} = TS.(UV\alpha\alpha_1)(\beta - \beta_1).$$

[Anmerkung. In den beiden letzten Ausdrücken ist das T vor S gesetzt worden, nur damit die Länge positiv werde. Ist

$$S.\alpha\alpha_1(\beta - \beta_1)$$

negativ, dann ist nach § 89

$$S.\alpha_1\alpha(\beta - \beta_1)$$

positiv. Lassen wir das T weg, so haben wir denjenigen dieser beiden Ausdrücke anzuwenden, der positiv ist.]

Um die Endpunkte der kürzesten Entfernung zu finden, operiren wir auf (1) mit $S.\alpha$ und $S.\alpha_1$. Wir erhalten auf diese Weise zwei Gleichungen, welche x und x_1 bestimmen, da y schon bekannt ist.

Wir wollen kurz dieselbe Aufgabe noch in einer etwas verschiedenen Weise behandeln.

204.] *In ein gegebenes Tetraeder soll ein System von rechtwinkligen Coordinatenachsen so gelegt werden, dass jede Achse zwei gegenüberliegende Kanten schneidet.*

Es seien α, β, γ die drei Vectorkanten des Tetraeders; die Ecke, von welcher sie ausgehen, sei der Anfangspunkt. ϱ sei der Anfangspunkt des gesuchten rechtwinkligen Coordinatensystems, das wir i, j, k nennen wollen (es sind dies die unbekannten Vectoren). Die Bedingung, dass i, welches von ϱ ausgeht, α schneide, ist:

$$S.i\alpha\varrho = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Soll i auch die entgegengesetzte Kante schneiden, deren Gleichung ist:

$$\omega = \beta + x(\beta - \gamma),$$

so muss sein:

$$S.i(\beta - \gamma)(\varrho - \beta) = 0 \quad \text{oder} \quad Si\{(\beta - \gamma)\varrho - \beta\gamma\} = 0 \quad \ldots \quad (2)$$

Es gibt noch zwei weitere Gleichungen wie (1) und zwei wie (2), die man sofort hinschreiben kann. Man setze:

$$\begin{aligned} \beta - \gamma &= \alpha_1, & \gamma - \alpha &= \beta_1, & \alpha - \beta &= \gamma_1, \\ V\beta\gamma &= \alpha_2, & V\gamma\alpha &= \beta_2, & V\alpha\beta &= \gamma_2, \\ V\alpha_1\alpha &= \alpha_3, & V\beta_1\beta &= \beta_3, & V\gamma_1\gamma &= \gamma_3; \end{aligned}$$

und die sechs Gleichungen werden:

$$\begin{aligned} S.i\alpha\varrho &= 0, & S.i\alpha_1\varrho - Si\alpha_2 &= 0, \\ S.j\beta\varrho &= 0, & S.j\beta_1\varrho - Sj\beta_2 &= 0, \\ S.k\gamma\varrho &= 0, & S.k\gamma_1\varrho - Sk\gamma_2 &= 0. \end{aligned}$$

Die beiden in i liefern:

$$i \parallel \alpha S\alpha_2\varrho - \varrho(S\alpha\alpha_2 + S\alpha_3\varrho);$$

dem entsprechend erhält man:

$$j \parallel \beta S\beta_2\varrho - \varrho(S\beta\beta_2 + S\beta_3\varrho)$$

und
$$k \parallel \gamma S\gamma_2\varrho - \varrho(S\gamma\gamma_2 + S\gamma_3\varrho).$$

Die Bedingung, dass das System rechtwinklig sein soll, nämlich:

$$Sij = 0, \qquad Sjk = 0, \qquad Ski = 0,$$

liefert drei Gleichungen vierten Grades; die erste derselben ist:

$$0 = S\alpha\beta S\alpha_2\varrho S\beta_2\varrho - S\alpha\varrho S\alpha_2\varrho(S\beta\beta_2 + S\beta_3\varrho) - S\beta\varrho S\beta_2\varrho(S\alpha\alpha_2 + S\alpha_3\varrho) + \varrho^2(S\alpha\alpha_2 + S\alpha_3\varrho)(S\beta\beta_2 + S\beta_3\varrho).$$

Der gesuchte Anfangspunkt des rechtwinkligen Systems ist somit gegeben als Schnittpunkt dreier Flächen vierter Ordnung.

205.) Die Gleichung

$$S\alpha\varrho = 0$$

stellt an ϱ die einzige Bedingung, senkrecht auf α zu stehen; sie wird also befriedigt durch jeden Vector, der den Anfangspunkt verbindet mit Punkten einer Ebene, die durch den Anfangspunkt geht und auf α senkrecht steht; sie ist demnach die Gleichung dieser Ebene.

Um diese Gleichung durch ein direktes Verfahren zu erhalten, ähnlich wie in der gewöhnlichen Coordinaten-Geometrie, schreiben wir wie in § 29 $\varrho = x\beta + y\gamma$, wo β und γ zwei auf α senkrecht stehende Vectoren sind.

In dieser Form enthält die Gleichung zwei unbestimmte Grössen und ist oft von Nutzen; um die unbestimmten Grössen zu eliminiren, operiren wir mit $S.\alpha$ und erhalten die zuerst geschriebene Gleichung.

Wir können aber auch nur eine der unbestimmten Grössen elimininiren und erhalten:

$$V\beta\varrho = y\alpha,$$

und aus dieser Form folgt:

$$S\alpha\beta = 0.$$

Auf ähnliche Weise sehen wir, dass

$$S\alpha(\varrho - \beta) = 0$$

eine Ebene darstellt, die durch den Endpunkt von β geht und auf α senkrecht steht.

Auch dieser Gleichung kann man verschiedene äquivalente Formen geben.

206.) Die Schnittlinie der beiden Ebenen

$$\left.\begin{aligned} &S.\alpha(\varrho - \beta) \\ &S.\alpha_1(\varrho - \beta_1) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

enthält alle Punkte, für welche ϱ den beiden Gleichungen genügt. Da α, α_1 und $V\alpha\alpha_1$ nicht complanar sind, können wir schreiben (§ 92):

$$\varrho S.\alpha\alpha_1 V\alpha\alpha_1 = V\alpha\alpha_1 S.\alpha\alpha_1\varrho + V.\alpha_1 V\alpha\alpha_1 S\alpha\varrho + V.V(\alpha\alpha_1)\alpha S\alpha_1\varrho,$$

oder bei Benutzung der gegebenen Gleichungen:

$$-\varrho T^2 V\alpha\alpha_1 = V.\alpha_1 V\alpha\alpha_1 S\alpha\beta + V.V(\alpha\alpha_1)\alpha S\alpha_1\beta_1 + xV\alpha\alpha_1 \quad ..(2)$$

wo x, eine unbestimmte Scalar, an Stelle von $S.\alpha\alpha_1\varrho$ gesetzt wurde, welches jeden beliebigen Werth annehmen kann. In den Anwendungen sind die zwei gegebenen Scalargleichungen im allgemeinen brauchbarer, als die zum Theil unbestimmte Vectorform, die wir daraus hergeleitet haben.

Gehen beide Ebenen durch den Anfangspunkt, so ist

$$\beta = \beta_1 = 0$$

und wir erhalten $\varrho = xV\alpha\alpha_1$

als die Gleichung der Schnittlinie.

207.) *Die Ebene, welche durch den Anfangspunkt und die Schnittlinie der beiden Ebenen* (1) *gelegt ist*, hat folgende Gleichung:

$$S\alpha_1\beta_1 S\alpha\varrho - S\alpha\beta S\alpha_1\varrho = 0,$$

oder $$S(\alpha S\alpha_1\beta_1 - \alpha_1 S\alpha\beta)\varrho = 0,$$

denn dies ist offenbar die Gleichung einer Ebene, welche durch den Anfangspunkt geht; und ist

$$S\alpha\varrho = S\alpha\beta,$$

so folgt: $$S\alpha_1\varrho = S\alpha_1\beta_1,$$

und dies sind die Gleichungen (1).

Wir sehen also, dass der Vector

$$\alpha S\alpha_1\beta_1 - \alpha_1 S\alpha\beta$$

senkrecht steht auf der Vectorschnittlinie (2) der beiden Ebenen (1) und auf jedem Vector, der den Anfangspunkt mit einem Punkte jener Geraden verbindet.

Der Leser mag die Richtigkeit dieser Behauptung nachweisen.

208.) *Man bestimme das Vectorperpendikel vom Endpunkte von β auf die Ebene*

$$S\alpha\varrho = 0.$$

Diese Senkrechte ist zunächst α parallel, und der Werth von ϱ für deren Fusspunkt ist also

$$\varrho = \beta + x\alpha,$$

wo $x\alpha$ das gesuchte Vectorperpendikel ist.

Hieraus: $$S\alpha(\beta + x\alpha) = 0;$$

dies liefert $$x\alpha^2 = -S\alpha\beta,$$

oder $$x\alpha = -\alpha^{-1}S\alpha\beta.$$

Auf ähnliche Weise findet man für das Vectorperpendikel vom Endpunkte von β auf die Ebene

$$S\alpha(\varrho - \gamma) = 0$$

den Ausdruck: $$-\alpha^{-1}S\alpha(\beta - \gamma).$$

209.) *Die Gleichung der Ebene, welche durch die Endpunkte von α, β, γ gelegt ist*, findet man, wie folgt. Es sei ϱ ein Punkt der gesuchten Ebene, $\varrho - \alpha$, $\alpha - \beta$, $\beta - \gamma$ liegen in der Ebene, nach § 101 ist also:

$$S.(\varrho - \alpha)(\alpha - \beta)(\beta - \gamma) = 0,$$

oder $$S\varrho(V\alpha\beta + V\beta\gamma + V\gamma\alpha) - S.\alpha\beta\gamma = 0.$$

Ist also $$\delta = x(V\alpha\beta + V\beta\gamma + V\gamma\alpha)$$

das Vectorperpendikel vom Anfangspunkte auf die Ebene, welche die Endpunkte von α, β, γ enthält, so folgt:

$$\delta = (V\alpha\beta + V\beta\gamma + V\gamma\alpha)^{-1}S.\alpha\beta\gamma.$$

Aus dieser Formel, welche leicht gedeutet werden kann, mag der Leser manche merkwürdige Eigenschaften des Tetraeders ableiten. Nehmen wir zum Beispiel auf beiden Seiten die Tensoren und erinnern uns an die Ergebnisse des § 100, so sehen wir, dass

$$T(V\alpha\beta + V\beta\gamma + V\gamma\alpha)$$

gleich ist zweimal dem Flächeninhalte der Basis des Tetraeders. Wir können dies einfacher auf folgende Weise beweisen.

Der Vectorflächeninhalt der Basis ist

$$\tfrac{1}{2}V(\alpha - \beta)(\gamma - \beta) = -\tfrac{1}{2}(V\alpha\beta + V\beta\gamma + V\gamma\alpha).$$

Die Summe der Vectorflächeninhalte eines Tetraeders, und folglich eines jeden Körpers, ist also Null.

Es ist dies der hydrostatische Satz für einen in eine Flüssigkeit getauchten Körper, auf welche keine äussern Kräfte wirken.

210.) Nimmt man zwei beliebige Gerade, deren Gleichungen sind

$$\varrho = \beta + x\alpha,$$

$$\varrho = \beta_1 + x_1\alpha,$$

so ist $$S.\alpha\alpha_1(\varrho - \delta) = 0$$

die Gleichung einer Ebene, die diesen beiden Geraden parallel ist. Die Lage dieser Ebene hängt von dem Werthe von δ ab.

Ist $\delta = \beta$, so enthält die Ebene die erste Gerade; ist $\delta = \beta_1$, so enthält sie die zweite.

Ist $yV\alpha\alpha_1$ die kürzeste Vectorentfernung zwischen den Geraden, dann ist

$$S.\alpha\alpha_1(\beta - \beta_1 - yV\alpha\alpha_1) = 0,$$

oder $$T(yV\alpha\alpha_1) = TS.(\beta - \beta_1)UV\alpha\alpha_1,$$

das Resultat des § 203.

211.) *Man suche die Gleichung der Ebene, welche durch den An-*

fangspunkt geht, und mit drei gegebenen Geraden gleiche Winkel einschliesst. Diese Winkel sind ebenfalls zu bestimmen.

α, β, γ seien Einheits-Vectoren in Richtung dieser Geraden, und die Gleichung der gesuchten Ebene sei

$$S\delta\varrho = 0.$$

Wir haben dann:

$$S\alpha\delta = S\beta\delta = S\gamma\delta = x,$$

wo $$-\frac{x}{T\delta}$$

der Sinus der gesuchten Winkel ist.

Nach § 92 haben wir:

$$\delta S.\alpha\beta\gamma = x(V\alpha\beta + V\beta\gamma + V\gamma\alpha).$$

Hiernach ist $$S.\varrho(V\alpha\beta + V\beta\gamma + V\gamma\alpha) = 0$$

die gesuchte Gleichung; der gesuchte Sinus ist:

$$-\frac{S.\alpha\beta\gamma}{T(V\alpha\beta + V\beta\gamma + V\gamma\alpha)}.$$

212.) *Man suche den geometrischen Ort der Mittelpunkte einer Reihe von Geraden, die einer gegebenen Ebene parallel sind und deren Endpunkte auf zwei festen Geraden liegen.*

Es sei $$S\gamma\varrho = 0$$

die Ebene und $$\varrho = \beta + x\alpha, \qquad \varrho = \beta_1 + x_1\alpha,$$

die festen Geraden.

x und x_1 sollen den Endpunkten einer der veränderlichen Geraden gehören, ω sei der Vector ihres Mittelpunktes.

Wir haben dann

$$2\omega = \beta + x\alpha + \beta_1 + x_1\alpha_1,$$

und $$S\gamma(\beta - \beta_1 + x\alpha - x_1\alpha) = 0.$$

Dies liefert eine lineare Relation zwischen x und x_1, so dass, wenn wir den Werth von x_1 in die vorhergehende Gleichung einsetzen, wir ein Resultat erhalten von der Form:

$$\omega = \delta + x\varepsilon,$$

wo δ und ε bekannte Vectoren sind. Der gesuchte geometrische Ort ist also eine Gerade.

213.) *Drei Ebenen schneiden sich in einem Punkte; durch die Schnittlinie je zwei derselben legt man eine Ebene, die auf der dritten senkrecht steht; man soll nachweisen, dass im allgemeinen diese Ebenen durch dieselbe Gerade gehen.*

Wir wählen den Schnittpunkt der Ebenen zum Anfangspunkte; die Gleichungen der Ebenen seien:

$$S\alpha\varrho = 0, \qquad S\beta\varrho = 0, \qquad S\gamma\varrho = 0.$$

Die Schnittlinie der beiden ersten ist $\parallel V\alpha\beta$, die Normale der ersten jener neuen Ebenen ist also

$$V.\gamma V\alpha\beta.$$

Die Gleichung dieser Ebene ist:

$$S.\varrho V.\gamma V\alpha\beta = 0,$$

oder
$$S\beta\varrho S\alpha\gamma - S\alpha\varrho S\beta\gamma = 0;$$

die Gleichungen der beiden andern erhält man durch cyklische Vertauschung von α, β, γ.

Wir sehen nun, dass zwei dieser Gleichungen die dritte durch Addition oder Subtraction liefern, und dies beweist unser Satz.

214.) *Es sei gegeben eine beliebige Zahl von Punkten A, B, C etc., deren Vectoren vom Anfangspunkte sind* α_1, α_2, α_3 ...; *man suche die Gleichung der durch den Anfangspunkt gehenden Ebene, für welche die Summe der Quadrate der Perpendikel von diesen Punkten auf die Ebene ein Maximum oder Minimum ist.*

Die gesuchte Gleichung sei

$$S\omega\varrho = 0,$$

wir können festsetzen, dass $T\omega = 1$.

Die Perpendikel sind (§ 208) $-\omega^{-1}S\omega\alpha_1$ u. s. w.

Also ist
$$\Sigma S^2\omega\alpha$$

ein Maximum. Dies gibt

$$\Sigma.S\omega\alpha S\alpha d\omega = 0;$$

und die Bedingung, dass ω ein Einheits-Vector sei, liefert

$$S\omega d\omega = 0.$$

Da $d\omega$ unendlich viele verschiedene Werthe haben kann, so können diese Gleichungen nur bestehen, wenn

$$\Sigma.\alpha S\alpha\omega = x\omega,$$

wo x eine Scalar ist.

Die Werthe von α sind bekannt, sodass, wenn wir setzen

$$\Sigma.\alpha S\alpha\omega = \varphi\omega,$$

φ eine selbstconjugirte lineare Vectorfunction ist; x hat demnach drei Werthe (g_1, g_2, g_3, § 164), die drei auf einander senkrechten ω entsprechen. Für einen dieser Werthe gibt es ein Maximum, für den andern ein Minimum, für den dritten ein Maximum-Minimum, im allgemeinsten Falle, wenn g_1, g_2, g_3 alle verschieden sind.

215.) Folgende schöne Aufgabe rührt von Maccullagh her:

Von einem Systeme dreier rechtwinkliger Vectoren, die durch den Anfangspunkt gehen, liegen zwei in gegebenen Ebenen; man bestimme den geometrischen Ort des dritten.

Die rechtwinkligen Vectoren seien ω, ϱ, σ. Dann liefern die Bedingungen der Aufgabe:

$$S\omega\varrho = S\varrho\sigma = S\sigma\omega = 0,$$

und
$$S\alpha\omega = 0, \qquad S\beta\varrho = 0.$$

Die Lösung hängt ab von der Elimination von ϱ und ω aus diesen fünf Gleichungen. [Im allgemeinen wäre dies nicht möglich, da ϱ und ω sechs unbekannte Scalaren einschliessen; da aber, wie aus der Form der Gleichungen folgt, die Tensoren nicht vorkommen, so genügen die fünf Gleichungen, um die vier unbekannten Scalaren zu eliminiren, die wirklich auftreten. Um der Form wegen die nöthige Zahl von Gleichungen zu haben, könnte man schreiben:

$$T\omega = a, \qquad T\varrho = b;$$

aber a und b können einen beliebigen Werth haben.]

Aus
$$S\alpha\omega = 0, \qquad S\sigma\omega = 0$$

folgt
$$\omega = xV\alpha\sigma.$$

Aus
$$S\beta\varrho = 0, \qquad S\sigma\varrho = 0$$

erhalten wir
$$\varrho = yV\beta\sigma.$$

Setzt man dies in die letzte Gleichung

$$S\omega\varrho = 0,$$

so folgt
$$S.V\alpha\sigma V\beta\sigma = 0,$$

oder
$$S\alpha\sigma S\beta\sigma - \sigma^2 S\alpha\beta = 0,$$

die gesuchte Gleichung. Wie wir in dem folgenden Kapitel sehen werden, ist dies ein Kegel zweiter Ordnung, dessen Kreisschnitte auf α und β senkrecht sind. [Das Verschwinden von x und y ist eine lehrreiche Bestätigung der obigen Anmerkung.]

Uebungsbeispiele zu Kapitel VI.

1. Welcher geometrische Satz wird bewiesen allein aus der *Form* des Ausdrucks:

$$\varrho = (1 - x)\alpha + x\beta,$$

welcher die Verbindungsgerade zweier beliebiger Punkte im Raume gibt?

2. Nachzuweisen, dass die Berührungssehnen derjenigen Tangenten an eine Parabel, welche sich unter einem rechten Winkel schneiden, durch einen festen Punkt gehen.

3. Man beweise die Haupteigenschaften des Kreises (Euclid III) aus der Gleichung

$$\varrho = \alpha \cos\vartheta + \beta \sin\vartheta,$$

wo $T\alpha = T\beta$ und $S\alpha\beta = 0$.

4. Welcher geometrische Ort wird dargestellt durch die Gleichung

$$S^2\alpha\varrho + \varrho^2 = 0,$$

wo $T\alpha = 1$?

5. Welches ist die Bedingung, dass die Geraden

$$V\alpha\varrho = \beta, \qquad V\alpha_1\varrho = \beta_1,$$

sich schneiden?

Wenn diese Geraden sich nicht schneiden, welches ist dann die kürzeste Entfernung derselben?

6. Die Gleichung der Ebene zu bestimmen, welche die beiden parallelen Geraden enthält:

$$V\alpha(\varrho - \beta) = 0 \quad \text{und} \quad V\alpha(\varrho - \beta_1) = 0.$$

7. Die Gleichung der Ebene zu bestimmen, welche enthält

$$V\alpha(\varrho - \beta) = 0,$$

und auf

$$S\gamma\varrho = 0$$

senkrecht steht.

8. Die Gleichung der Geraden aufzustellen, welche durch einen gegebenen Punkt geht und mit einer gegebenen Ebene einen gegebenen Winkel einschliesst.

Hieraus leite man die allgemeine Gleichung eines geraden Kegels ab.

9. Welcher Bedingung müssen eine gegebene Zahl von Geraden im Raume genügen, damit es möglich sei, durch jede derselben eine Ebene zu legen, welche die übrigen Ebenen in derselben Geraden schneidet?

10. Die Gleichung des geometrischen Ortes eines Punktes aufzustellen, für welchen die Summe der Quadrate der Entfernungen von einer Anzahl gegebener Ebenen constant ist.

11. Dieselbe Aufgabe, nur setze man „Geraden“ an Stelle von „Ebenen“.

12. Die Gleichung der Ebene aufzustellen, welche die kürzeste Entfernung zwischen zwei Geraden halbirt und auf derselben senkrecht steht.

In dieser Ebene bestimme man weiter den geometrischen Ort des Punktes, der von den beiden Geraden gleichweit entfernt ist.

13. Man suche die Bedingungen, unter welchen die simultanen Gleichungen

$$S\alpha\varrho = a, \qquad S\beta\varrho = b, \qquad S\gamma\varrho = c$$

eine Gerade und nicht einen Punkt darstellen.

14. Was wird dargestellt durch die Gleichungen

$$(S\alpha\varrho)^2 = (S\beta\varrho)^2 = (S\gamma\varrho)^2,$$

wo α, β, γ drei beliebige Vectoren sind?

15. Die Gleichung der Ebene aufzustellen, welche durch zwei feste Punkte geht und einen gegebenen Winkel einschliesst mit einer festen Ebene.

16. Den Flächeninhalt eines Dreiecks zu bestimmen, dessen Eckpunkte die Vectoren haben α, β, γ.

Hieraus leite man die Gleichung des Kreiscylinders ab, dessen Achse und Halbmesser gegeben sind.

17. (Hamilton, Bischof Law's Premium Ex. 1858.)

(a) Man gebe einige Umformungen des Ausdrucks

$$\frac{V\alpha\beta}{\beta-\alpha},$$

wo α und β die Vectoren zweier gegebener Punkte A und B sind.

(b) Der Ausdruck stellt den Vector γ dar oder $\overline{OC}$, wo C ein Punkt in der Geraden AB ist.

(c) Man gebe die Lage von C an.

18. (Ibid.)

(a) Sind α, β, γ, δ die Vectoren von vier Punkten A, B, C, D, welches sind die Bedingungen, damit diese vier Punkte in einer Ebene liegen?

(b) Endigen diese vier von einem Punkte ausgehende Vectoren nicht in einer Ebene, welches ist der Inhalt der Pyramide, die jene vier Punkte zu Ecken hat?

(c) Man drücke das Perpendikel von dem Anfangspunkte O auf die Ebene ABC aus durch α, β, γ.

19. Den geometrischen Ort des Punktes zu bestimmen, der gleichweit entfernt ist von den drei Ebenen

$$S\alpha\varrho = 0, \qquad S\beta\varrho = 0, \qquad S\gamma\varrho = 0.$$

20. Legt man durch einen Punkt drei aufeinander senkrechte Vectoren, die durch eine feste Ebene begrenzt werden, so ist die Summe der Quadrate der Reciproken ihrer Längen unabhängig von ihrer Richtung.

21. Man leite die allgemeine Gleichung der Ebene ab aus der als Definition genommenen Bedingung, dass je zwei Ebenen sich in einer einzigen Geraden schneiden.

22. Nachzuweisen, dass die Summe der Vectorflächeninhalte eines Polyeders Null ist.

Kapitel VII.

Die Kugel und der Kreiskegel.

216.) Nach der Gleichung der Ebene sind die Gleichungen der Kugel und des Kegels zweiten Grades die einfachsten. Wir wollen diese Gleichungen in einem kurzen Kapitel behandeln, als Vorbereitung auf das Studium der Flächen zweiter Ordnung im allgemeinen.

217.) Die Gleichung $$T\varrho = T\alpha,$$

oder $$\varrho^2 = \alpha^2,$$

drückt aus, dass die Länge von ϱ der Länge eines gegebenen Vectors gleich ist; ϱ ist also der Vector eines Punktes der Kugelfläche vom Radius $T\alpha$ und mit dem Anfangspunkte als Mittelpunkt.

In § 107 haben wir schon verschiedene Umformungen dieser Gleichung erhalten; wir wollen einige derselben hier wieder anführen und ihre geometrische Deutung geben. Z. B.

$$S(\varrho + \alpha)(\varrho - \alpha) = 0$$

sagt aus, dass die Sehnen, welche von einem beliebigen Punkte der Kugelfläche nach den Endpunkten eines Durchmessers (deren Vectoren sind $-\alpha$ und α) geführt werden, aufeinander senkrecht stehen.

$$V(\varrho + \alpha)(\varrho - \alpha) = 2TV\alpha\varrho$$

zeigt, dass das auf diesen Sehnen construirte Rechteck gleich ist viermal dem Flächeninhalte des Dreiecks, dessen Seiten α und ϱ sind.

$$\varrho = (\varrho + \alpha)^{-1}\alpha(\varrho + \alpha) \quad (\S\ 105)$$

zeigt, dass in jedem Kreise der Centralwinkel gleich ist dem doppelten Winkel, dessen Spitze auf dem Kreisumfange liegt, und dessen Schenkel denselben Bogen einschliessen. Dies alles sind Folgerungen, die sich leicht ergeben aus den schon dargestellten Verfahren zur Deutung von Quaternionenausdrücken.

218.) Liegt der Mittelpunkt der Kugel am Endpunkte von α, so kann man die Gleichung schreiben:

$$T(\varrho - \alpha) = T\beta,$$

und dies ist die allgemeinste Form.

Wenn $$T\alpha = T\beta,$$

oder $$\alpha^2 = \beta^2,$$

wenn also der Anfangspunkt auf der Kugelfläche liegt, so wird die Gleichung:

$$\varrho^2 - 2S\alpha\varrho = 0.$$

Bringt man dies auf die Form

$$S\varrho(\varrho - 2\alpha) = 0,$$

so hat man einen neuen Beweis, dass der Winkel in einem Halbkreise ein rechter ist.

219.) Die umgekehrte Aufgabe lautet: *Man bestimme den geometrischen Ort der Fusspunkte der Perpendikel, welche von dem Punkte* $\varrho = \beta$ *auf Ebenen gefällt werden, die durch den Anfangspunkt gehen.*

Es sei $$S\alpha\varrho = 0$$

eine dieser Ebenen; das Vectorperpendikel ist dann nach § 208:

$$-\alpha^{-1}S\alpha\beta,$$

und für den geometrischen Ort der Fusspunkte erhält man:

$$\varrho = \beta - \alpha^{-1}S\alpha\beta,$$
$$= \alpha^{-1}V\alpha\beta.$$

[Es ist dies ein Beispiel einer eigenthümlichen Form, in welcher die Quaternionen uns manchmal die Gleichung einer Fläche liefern. Die Gleichung ist eine Vectorgleichung, also gleichbedeutend mit drei Scalargleichungen; der unbestimmte Vector α geht aber auf solche Weise in die Gleichung ein, dass er nur mit zwei unbestimmten Grössen equivalent ist (der Tensor von α kommt offenbar nicht vor). Um die Gleichung auf eine Form zu bringen, die sich unmittelbar deuten lässt, muss α eliminirt werden, und die eben gemachte Bemerkung zeigt, dass dies möglich ist.]

Wir haben: $$(\varrho - \beta)^2 = \alpha^{-2}S^2\alpha\beta,$$

und operirt man mit $S.\beta$ auf die frühere Gleichung, so folgt:

$$S\beta\varrho - \beta^2 = -\alpha^{-2}S^2\alpha\beta.$$

Durch Addition erhält man:

$$\varrho^2 - S\beta\varrho = 0,$$

oder $$T\left(\varrho - \frac{\beta}{2}\right) = T\frac{\beta}{2};$$

der gesuchte geometrische Ort ist also eine Kugel, die β zum Durchmesser hat.

220.) *Die Schnittlinie zweier Kugeln zu bestimmen.*

Die Kugeln seien:

$$T(\varrho - \alpha) = T\beta,$$

und $$T(\varrho - \alpha_1) = T\beta_1.$$

Man quadrire und ziehe die zweite Gleichung von der ersten ab, so folgt:

$$2S(\alpha - \alpha_1)\varrho = \alpha^2 - \alpha_1{}^2 - (\beta^2 - \beta_1{}^2);$$

dies ist die Gleichung einer Ebene, senkrecht auf $(\alpha - \alpha_1)$, dem Vector, der die Mittelpunkte der beiden Kugeln verbindet. Diese Ebene ist stets reell, ob die Kugeln sich schneiden oder nicht. Es ist in der That die sogenannte Radical-Ebene.

221.) *Man bestimme den geometrischen Ort des Punktes, dessen Entfernungen von zwei festen Punkten in einem constanten Verhältnisse zu einander stehen.*

Die gegebenen Punkte seien O und A, die Endpunkte des Vectors α. P sei der gesuchte Punkt in einer von seinen Lagen; $\overline{OP} = \varrho$.

Ist n das Verhältniss der Längen der beiden Geraden, so ist

$$T(\varrho - \alpha) = n T\varrho.$$

Hieraus $$\varrho^2 - 2S\alpha\varrho + \alpha^2 = n^2\varrho^2,$$

oder, nach einer einfachen Umformung:

$$T\left(\varrho - \frac{\alpha}{1-n^2}\right) = T\left(\frac{n\alpha}{1-n^2}\right).$$

Der geometrische Ort ist also eine Kugel vom Halbmesser $T\left(\frac{n\alpha}{1-n^2}\right)$, deren Mittelpunkt in B liegt, wo $\overline{OB} = \frac{\alpha}{1-n^2}$, ein bestimmter Punkt auf der Geraden OA.

222.) *Auf einer beliebigen Geraden, OP, die vom Anfangspunkte nach einer gegebenen Ebene geführt ist, wird OQ so gewählt, dass $OQ.OP$ constant ist. Man bestimme den geometrischen Ort von Q.*

Die Gleichung der Ebene sei:

$$S\alpha\varrho = a,$$

ω ein Vector der gesuchten Fläche. Aus den Bedingungen der Aufgabe folgt dann:

$$T\omega\, T\varrho = \text{constans} = b^2,$$

und $$U\omega = U\varrho;$$

hieraus $$\varrho = \frac{b^2 U\omega}{T\omega} = \frac{-b^2\omega}{\omega^2}.$$

Setzen wir dies in die Gleichung der Ebene ein, so folgt:

$$a\omega^2 + b^2 S\alpha\omega = 0;$$

dies zeigt, dass der geometrische Ort eine Kugel ist; der Anfangspunkt liegt auf der Kugel in dem Punkte, der am weitesten von der gegebenen Ebene entfernt ist.

223.) *Den geometrischen Ort des Punktes zu bestimmen, für welchen*

die Summe der Quadrate der Entfernungen von einem Systeme gegebener Punkte constant ist. Man bestimme weiter den kleinsten Werth jener Constanten und den entsprechenden geometrischen Ort.

Die Vectoren vom Anfangspunkte aus nach den gegebenen Punkten seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, und der Vector des gesuchten Punktes sei ϱ, dann hat man:

$$-c^2 = (\varrho - \alpha_1)^2 + (\varrho - \alpha_2)^2 + \ldots + (\varrho - \alpha_n)^2$$
$$= n\varrho^2 - 2S\varrho\Sigma\alpha + \Sigma(\alpha^2),$$

oder $$\left(\varrho - \frac{\Sigma\alpha}{n}\right)^2 = -\frac{c^2 + \Sigma(\alpha^2)}{n} + \frac{(\Sigma\alpha)^2}{n^2},$$

die Gleichung einer Kugel, deren Mittelpunkt den Vector $\frac{\Sigma\alpha}{n}$ hat, d. h. der Mittelpunkt der Kugel ist der mittlere Punkt des Systems der gegebenen Punkte.

Verlegt man den Anfangspunkt nach jenem mittleren Punkte, so wird die Gleichung:

$$\varrho^2 = -\frac{c^2 + \Sigma(\alpha^2)}{n}, \qquad [\text{denn} \quad \Sigma\alpha = 0 \quad \S\ 31.\ (e)];$$

das Glied auf der rechten Seite ist negativ, und die Gleichung stellt demnach eine reelle Fläche dar, wenn $c^2 > \Sigma T\alpha^2$, wie zu erwarten war. Werden diese Grössen einander gleich, so wird der geometrische Ort ein Punkt, nämlich der Anfangspunkt oder der mittlere Punkt des Systems.

224.) Differentiiren wir die Gleichung

$$T\varrho = T\alpha,$$

so folgt $$S\varrho d\varrho = 0.$$

Nach § 137 heisst dies, dass ϱ senkrecht steht auf der Fläche an seinem Endpunkte; eine wohlbekannte Eigenschaft der Kugel.

Ist ω ein beliebiger Punkt in der Ebene, welche die Kugel in dem Endpunkte von ϱ berührt, so ist $\omega - \varrho$ eine Gerade in der Tangentialebene, und ist deshalb senkrecht auf ϱ.

$$S\varrho(\omega - \varrho) = 0,$$

oder $$S\varrho\omega = -T\varrho^2 = \alpha^2$$

ist also die Gleichung der Tangentialebene.

225.) Geht diese Ebene durch einen gegebenen Punkt B, dessen Vector β ist, so folgt:

$$S\beta\varrho = \alpha^2.$$

Dies ist die Gleichung einer Ebene, senkrecht auf β, die von β ein Stück abschneidet von der Länge

$$\frac{T\alpha^2}{T\beta}.$$

Geht diese Ebene durch einen festen Punkt, dessen Vector γ ist, so folgt:

$$S\beta\gamma = \alpha^2,$$

und der geometrische Ort von β ist eine Ebene. Diese Formeln enthalten alle die bekanntesten Eigenschaften der Pole und Polaren in Bezug auf eine Kugel.

226.) Eine Gerade, die vom Endpunkte von β mit γ parallel gezogen wird, hat die Gleichung

$$\varrho = \beta + x\gamma.$$

Diese Gerade trifft die Kugel

$$\varrho^2 = \alpha^2$$

in Punkten, die den Werthen von x entsprechen, die gegeben sind durch die Gleichung

$$\beta^2 + 2xS\beta\gamma + x^2\gamma^2 = \alpha^2.$$

Die Werthe von x sind imaginär, das heisst die Gerade schneidet die Kugel nicht, wenn

$$\alpha^2\gamma^2 + V^2\beta\gamma < 0.$$

Die Werthe von x sind gleich, das heisst die Gerade berührt die Kugel, wenn

$$\alpha^2\gamma^2 + V^2\beta\gamma = 0,$$

oder

$$S^2\beta\gamma = \gamma^2(\beta^2 - \alpha^2).$$

Dies ist die Gleichung eines Kegels, ähnlich dem Kegel der an die Kugel gelegten Tangenten und ähnlich gelegen wie dieser; doch ist die Spitze desselben im Anfangspunkte.

Dass die Gleichung einen Kegel darstellt, folgt daraus, dass sie homogen in $T\gamma$ ist, d. h. sie ist unabhängig von der Länge des Vectors γ.

[Wir bemerken, dass aus der Form der obigen Gleichung folgt, wenn x, x' die Wurzeln derselben sind:

$$(xT\gamma)(x'T\gamma) = \alpha^2 - \beta^2,$$

dies ist Euclid III, 35, 36, auf die Kugel übertragen.]

227.) *Man bestimme den geometrischen Ort der Fusspunkte der Perpendikel, welche von einem festen Punkte der Kugel aus auf die Tangentialebene gefällt werden.*

Nehmen wir den Mittelpunkt zum Anfangspunkte, so ist die Gleichung einer beliebigen Tangentialebene:

$$S\omega\varrho = \alpha^2.$$

Dass Perpendikel muss ϱ parallel sein; nehmen wir an, dies Perpendikel sei gefällt von α aus (einem Punkte auf der Kugel), so erhalten wir für ω einen Werth

$$\omega = \alpha + x\varrho.$$

Aus diesen Gleichungen und der Gleichung der Kugel

$$\varrho^2 = \alpha^2$$

müssen wir ϱ und x eliminiren.

Operiren wir mit $S.\omega$ auf die Vectorgleichung, so erhalten wir

$$\omega^2 = S\alpha\omega + xS\omega\varrho$$
$$= S\alpha\omega + x\alpha^2;$$

hieraus: $$\varrho = \frac{\omega - \alpha}{x} = \frac{\alpha^2(\omega - \alpha)}{\omega^2 - S\alpha\omega}.$$

Nehmen wir die Tensoren, so ist

$$(\omega^2 - S\alpha\omega)^2 = \alpha^2(\omega - \alpha)^2$$

die gesuchte Gleichung. Wir können ihr die Form geben:

$$S^2\omega\, U(\omega - \alpha) = -\alpha^2,$$

und die Deutung dieser Gleichung liefert sofort eine charakteristische Eigenschaft der Fläche, welche entsteht durch die Rotation der Cardioïde um ihre Symmetrieachse.

228.) Wir sahen, dass die Gleichung der Kugel, bezogen auf einen beliebigen Anfangspunkt, ist:

$$T(\varrho - \alpha) = T\beta.$$

Hieraus *soll man den Flächeninhalt des Rechtecks bestimmen, das aus den Segmenten einer Sehne gebildet wird, die von einem beliebigen Punkte ausgeht.*

Wir können setzen

$$\varrho = x\gamma,$$

wo γ ein beliebiger Einheits-Vector sein soll. Dies liefert:

$$x^2\gamma^2 - 2xS\alpha\gamma + \alpha^2 = \beta^2;$$

das Product der beiden Vectoren von x ist:

$$= -\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\gamma^2} = -\alpha^2 + \beta^2.$$

Dies ist positiv, oder die Vectorsehnen sind in *derselben* Richtung gezogen, wenn

$$T\beta < T\alpha,$$

d. h. wenn der Anfangspunkt ausserhalb der Kugel liegt.

229.) *A, B seien feste Punkte, O der Anfangspunkt und P ein Punkt im Raume. Man suche den geometrischen Ort von P, das der Gleichung genügt:*

$$AP^2 + BP^2 = OP^2.$$

Man erkläre das Resultat, wenn $\angle AOB$ ein rechter oder ein stumpfer Winkel ist.

Es sei $\overline{OA} = \alpha, \quad \overline{OB} = \beta, \quad \overline{OP} = \varrho,$

dann ist: $$(\varrho - \alpha)^2 + (\varrho - \beta)^2 = \varrho^2,$$

oder $$\varrho^2 - 2S(\alpha + \beta)\varrho = -(\alpha^2 + \beta^2),$$

oder $$T\{\varrho - (\alpha + \beta)\} = \sqrt{(-2S\alpha\beta)}.$$

So lange $S\alpha\beta$ negativ ist, das heisst, wenn $\angle AOB$ ein spitzer ist, dann ist der geometrische Ort eine Kugel, deren Mittelpunkt den Vector $\alpha + \beta$ hat. Ist $S\alpha\beta = 0$ oder $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$, so beschränkt sich der geometrische Ort auf den Punkt

$$\varrho = \alpha + \beta.$$

Ist $\angle AOB > \frac{\pi}{2}$, so genügt kein Punkt den gegebenen Bedingungen.

230.) *Man beschreibe eine Kugel, die ihren Mittelpunkt auf einer gegebenen Geraden habe, durch einen gegebenen Punkt gehe, und eine gegebene Ebene berühre.*

Es sei $x\alpha$, wo x eine unbestimmte Scalar ist, der Vector des Mittelpunktes; r der Radius der Kugel, β der Vector des gegebenen Punktes, und

$$S\gamma\varrho = a$$

die Gleichung der gegebenen Ebene.

Das Vectorperpendikel von $x\alpha$ auf die gegebene Ebene ist (§ 208):

$$(a - xS\gamma\alpha)\gamma^{-1}.$$

Um x zu bestimmen, haben wir die Gleichung

$$T.(\alpha - xS\gamma\alpha)\gamma^{-1} = T(x\alpha - \beta) = r.$$

Im allgemeinen gibt es also zwei Lösungen. Eine gute Uebung für den Leser ist es, aus dieser Gleichung die Bedingung herzuleiten, dass es keine Lösung gibt, oder zwei zusammenfallende Lösungen.

231.) *Eine Kugel zu beschreiben, deren Mittelpunkt auf einer gegebenen Geraden liegt, und welche durch zwei gegebene Punkte geht.*

Der Vector des Mittelpunktes sei wiederum $x\alpha$. Die Vectoren der gegebenen Punkte seien β und γ. Dann hat man

$$T(\gamma - x\alpha) = T(\beta - x\alpha) = r.$$

Hier gibt es nur eine derartige Kugel, ausser in dem speciellen Falle, wenn

$$T\gamma = T\beta \quad \text{und} \quad S\alpha\gamma = S\alpha\beta,$$

in diesem Falle gibt es deren unendlich viele.

Wir empfehlen dem Leser, dies Resultat sorgfältig mit dem des vorigen Paragraphen zu vergleichen, um einzusehen, weshalb in dem einen Falle zwei Lösungen möglich sind und nur eine in dem andern.

232.) *Eine Kugel berührt zwei Gerade, welche sich kreuzen; man suche den geometrischen Ort ihres Mittelpunktes.*

Wir legen den Anfangspunkt in den Mittelpunkt der kürzesten Entfernung (§ 203) der gegebenen Geraden; die Gleichungen derselben sind dann:

$$\varrho = \alpha + x\beta,$$

$$\varrho = -\alpha + x_1\beta_1,$$

und $$S\alpha\beta = 0, \qquad S\alpha\beta_1 = 0.$$

σ sei der Vector des Mittelpunktes, ϱ der Vector eines beliebigen Punktes einer der Kugeln, r deren Radius. Die Gleichung derselben ist dann

$$T(\varrho - \sigma) = r.$$

Da die beiden Geraden Tangenten der Kugel sind, so müssen die folgenden Gleichungen in x und x_1 je zwei gleiche Wurzeln haben:

$$T(\alpha + x\beta - \sigma) = r,$$

$$T(-\alpha + x_1\beta_1 - \sigma) = r.$$

Die Gleichheit der Wurzeln liefert die Bedingungen:

$$S^2\beta\sigma = \beta^2((\alpha - \sigma)^2 + r^2),$$

$$S^2\beta_1\sigma = \beta_1{}^2((\alpha + \sigma)^2 + r^2).$$

Eliminirt man r, so folgt

$$\beta^{-1}S^2\beta\sigma - \beta_1{}^{-2}S^2\beta_1\sigma = (\alpha - \sigma)^2 - (\alpha + \sigma)^2 = -4S\alpha\sigma,$$

und dies ist die Gleichung des gesuchten geometrischen Ortes.

[Da wir die Quaternionenformen der verschiedenen Flächen zweiter Ordnung noch nicht betrachtet haben, so wollen wir dies in Cartesische Coordinaten übertragen, um die Bedeutung des Ausdruckes zu finden.

Nehmen wir die Coordinatenachsen parallel mit β, β_1 und α, so folgt:

$$(x + my)^2 - (y + mx)^2 = pz,$$

wo m und p Constanten sind; wir sehen also, dass der geometrische Ort ein hyperbolisches Paraboloid ist. Derartige Umformungen, die stets sehr einfach sind, werden dem Leser, der mit der Cartesischen Geometrie vertraut ist, von grossem Nutzen sein, wenn er anfängt, sich mit Quaternionen zu befassen; wie er aber etwas vertrauter wird mit der neuen Rechnungsmethode, wird sich das Bedürfniss einer derartigen Unterstützung allmälig verlieren.]

Wie einfach jene Lösung auch sein mag, so liefern die Quaternionen noch eine weit einfachere. Man kann die Aufgabe nämlich auch so fassen:

Den geometrischen Ort des Punktes zu bestimmen, dessen Entfernungen von zwei gegebenen Geraden gleich sind.

Benutzen wir die obige Bezeichnungsweise, so drücken wir die Gleichheit jener Perpendikel aus (§ 201) durch:

$$TV.(\alpha - \sigma)U\beta = TV.(\alpha + \sigma)U\beta_1,$$

und dies ist gleichbedeutend mit der obigen Gleichung.

233.) *Zwei Kugeln sind gegeben; man soll nachweisen, dass die Kugeln, welche diese unter gegebenen Winkeln schneiden, eine dritte feste Kugel unter einem rechten Winkel schneiden.*

Ist c die Entfernung der Mittelpunkte zweier Kugeln, deren Halbmesser a und b sind, so ist der Cosinus des Winkels, unter dem sie sich schneiden,

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Sind nun α, α_1, ϱ die Vectoren der Mittelpunkte, a, a_1, r die Halbmesser der beiden gegebenen und einer der variabeln Kugeln, A und A_1 die Schnittwinkel, so haben wir:

$$(\varrho - \alpha)^2 + a^2 + r^2 = 2ar\cos A,$$
$$(\varrho - \alpha_1)^2 + a_1^2 + r^2 = 2a_1 r\cos A_1.$$

Eliminirt man die erste Potenz von r, so erhält man ein Resultat von der Form:

$$(\varrho - \beta)^2 + b^2 + r^2 = 0,$$

wo, wie wir aus dem vorhergehenden sehen, β der Vector des Mittelpunktes und b der Halbmesser einer festen Kugel ist

$$(\varrho - \beta^2) + b^2 = 0,$$

die unter rechtem Winkel von all den variabeln Kugeln geschnitten wird. Führen wir diese Rechnung aus, so finden wir b und β durch gegebene Grössen ausgedrückt.

234.) *In eine gegebene Kugel soll ein geschlossenes Polygon, eben oder windschief, eingeschrieben werden, dessen Seiten einer Reihe von gegebenen Vectoren parallel sind.*

Es sei $T\varrho = 1$

die Kugel, α, β, γ ... η, ϑ die Vectoren, n an der Zahl, und ϱ_1, ϱ_2 ... ϱ_n seien die Vectorradien, die nach den Ecken des Polygons gezogen sind. Dann hat man

$$\varrho_2 - \varrho_1 = x_1\alpha \quad \text{u. s. w.}$$

Operirt man hierauf mit $S.(\varrho_2 + \varrho_1)$, so folgt:

$$\varrho_2^2 - \varrho_1^2 = 0 = S\alpha\varrho_2 + S\alpha\varrho_1;$$

anderseits ist $0 = V\alpha\varrho_2 - V\alpha\varrho_1.$

Durch Addition erhält man

$$0 = \alpha\varrho_2 + K\alpha\varrho_1 = \alpha\varrho_2 + \varrho_1\alpha,$$

hieraus: $\varrho_2 = -\alpha^{-1}\varrho_1\alpha.$

(Dies hätte man nach § 105 sofort hinschreiben können.)

Dem entsprechend erhält man:

$$\varrho_3 = -\beta^{-1}\varrho_2\beta = \beta^{-1}\alpha^{-1}\varrho_1\alpha\beta \quad \text{u. s. w.}$$

Da das Polygon geschlossen ist, erhält man schliesslich:

$$\varrho_{n+1} = \varrho_1 = (-1)^n \vartheta^{-1}\eta^{-1} \ldots \beta^{-1}\alpha^{-1}\varrho_1\alpha\beta \ldots \eta\vartheta .$$

Wir können nun die Tensoren von $\alpha, \beta \ldots \eta, \vartheta$ gleich der Einheit nehmen. Setzen wir also

$$a = \alpha\beta \ldots \eta\vartheta ,$$

so folgt $$a^{-1} = \vartheta^{-1}\eta^{-1} \ldots \beta^{-1}\alpha^{-1} ,$$

und dies ist eine bekannte Quaternion; unsere Gleichung wird also:

$$\varrho_1 = (-1)^n a^{-1}\varrho_1 a .$$

Dies zerfällt in zwei Fälle, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

Ist n gerade, so haben wir

$$a\varrho_1 = \varrho_1 a ;$$

lassen wir den gemeinschaftlichen Theil $\varrho_1 Sa$ weg, so haben wir:

$$V.\varrho_1 Va = 0 ;$$

dies liefert eine bestimmte Richtung $\pm Va$, für ϱ_1, und zeigt, dass es zwei und nur zwei Lösungen gibt.

Ist n ungerade, so haben wir

$$a\varrho_1 = -\varrho_1 a$$

und dies verlangt $$Sa = 0 ,$$

das heisst, a ist ein Vector.

Hieraus: $$Sa\varrho_1 = 0 .$$

ϱ_1 kann also nach irgend einem Punkte des grössten Kreises der Kugel vom Radius Eins gezogen sein, dessen Pole auf dem Vector a liegen.

235.) Um dies Resultat zu verdeutlichen, wollen wir erst den Fall wählen von $n = 3$.

Hier muss $$S.\alpha\beta\gamma = 0 ,$$

oder die drei gegebenen Vectoren müssen (wie man auch aus andern Gründen einsieht) einer gegebenen Ebene parallel sein.

$\alpha\beta\gamma$, welches in jener Ebene liegt, ist (§ 106) die Vectortangente an der ersten Ecke eines jeden der eingeschriebenen Dreiecke, und ist offenbar senkrecht auf dem Vector, der vom Mittelpunkte nach jener Ecke geführt ist.

Ist $n = 4$, so folgt

$$\varrho_1 \parallel V.\alpha\beta\gamma\delta$$

wie aus § 106 direct zu ersehen ist.

236.) Hamilton hat (Lectures p. 674) ein sinnreiches und einfaches Verfahren angegeben, durch welches jene Untersuchung an-

gewendet werden kann auf die schwierigere Aufgabe, wo jede Seite des Polygons durch einen gegebenen Punkt gehen muss, anstatt einer gegebenen Geraden parallel zu sein. Seine Methode beruht auf der Integration einer linearen Gleichung in endlichen Differenzen. Durch eine unmittelbare Anwendung der linearen Vectorfunction des Kapitel V. können die obigen Lösungen übertragen werden auf jede Centralfläche zweiter Ordnung.

237.) *Die Gleichung eines Rotationskegels aufzustellen, dessen Spitze im Anfangspunkte liegt.*

Es sei α, wo $T\alpha = 1$, die Achse des Kegels, e der Cosinus des halben Verticalwinkels; ist dann ϱ ein beliebiger Punkt des Kegels, so hat man:

$$S\alpha U\varrho = \mp e,$$

oder

$$S^2\alpha\varrho = -e^2\varrho^2.$$

238.) Verlegt man den Anfangspunkt nach dem Punkte der Achse, dessen Vector $x\alpha$ ist, so wird die Gleichung

$$(-x + S\alpha\omega)^2 = -e^2(x\alpha + \omega)^2.$$

Es soll nun der Radius b der Schnittcurve des Kegels und der Ebene

$$S\alpha\omega = 0$$

constant bleiben, während x sich ändert; dies verlangt

$$\frac{x}{\sqrt{b^2+x^2}} = e,$$

und wenn x unendlich wird, ist e gleich Eins. In diesem Falle wird die Gleichung

$$S^2\alpha\omega + \omega^2 + b^2 = 0;$$

dies muss also die Gleichung eines Kreiscylinders sein, dessen Radius gleich b und dessen Achse α ist.

Um dies einzusehen, haben wir nur zu bedenken, dass, wenn ω der Vector eines Punktes eines solchen Cylinders ist, wir haben (§ 201)

$$TV\alpha\omega = b,$$

und dies ist dieselbe Gleichung wie oben.

239.) *Die allgemeine Gleichung eines Kegels aufzustellen, der einen Kreisschnitt hat.*

Man lege die Spitze des Kegels in den Anfangspunkt, und der Kreisschnitt sei der Schnitt der Ebene

$$S\alpha\varrho = 1$$

mit der Kugel (welche durch den Anfangspunkt geht)

$$\varrho^2 = S\beta\varrho.$$

Diese Gleichungen kann man schreiben:

$$S\alpha U\varrho = \frac{1}{T\varrho},$$
$$-T\varrho = S\beta U\varrho.$$

Eliminirt man $T\varrho$, so erhält man folgende Gleichung, der $U\varrho$ genügen muss:

$$S\alpha U\varrho\, S\beta U\varrho = -1,$$

oder
$$\varrho^2 - S\alpha\varrho S\beta\varrho = 0,$$

und dies ist also die gesuchte Gleichung des Kegels.

Da α und β auf gleiche Weise in die Gleichung eingehen, so beweist schon allein die Form der Gleichung die Existenz des antiparallelen Schnittes, der von Apollonius entdeckt wurde.

240.) Obige Gleichung kann geschrieben werden

$$S.U\alpha U\varrho\, S.U\beta U\varrho = -\frac{1}{T.\alpha\beta}.$$

oder da α und β senkrecht stehen auf den cyklischen Bögen (§ 59*)

$$\sin p \sin p' = \text{constans},$$

wo p und p' Bögen sind, die von irgend einem Punkte eines sphärischen Kegelschnittes senkrecht auf die cyklischen Bögen gezogen sind. Es ist dies eine wohlbekannte Eigenschaft derartiger Curven.

241.) Schneiden wir den Kreiskegel durch eine Ebene, welche durch den Anfangspunkt geht, wie

$$S\gamma\varrho = 0,$$

dann sind $V\alpha\gamma$ und $V\beta\gamma$ deren Spuren auf den cyklischen Ebenen, so dass

$$\varrho = xUV\alpha\gamma + yUV\beta\gamma \quad (\S\ 29);$$

setzen wir dies in die Gleichung des Kegels ein, so folgt

$$-x^2 - y^2 + Pxy = 0,$$

wo P eine bekannte Scalar ist.

Die Werthe von x und y sind also dasselbe Paar von Zahlen.

Es ist dies ein elementarer Beweis des Satzes in § 59*, dass $\widehat{PL} = \widehat{MQ}$ (in der letzten Figur jenes Paragraphen).

242.) Sind x und y *gleich*, so wird der Transversalbogen zur Tangente an dem sphärischen Kegelschnitt, und wird durch den Berührungspunkt halbirt.

Hier haben wir

$$P = 2 = 2S.UV\alpha\gamma UV\beta\gamma + \frac{(S.\alpha\beta\gamma)^2}{T.V\alpha\gamma\, V\beta\gamma}.$$

Dies ist die Gleichung des Kegels, dessen Seiten im Anfangspunkte senkrecht stehen auf den Ebenen, welche den Kreiskegel berühren, und aus dieser Eigenschaft kann man leicht dieselbe Gleichung ableiten.

243.) Wir können hier bemerken, dass die Eigenschaft der stereographischen Projection der Kugel, das heisst, dass die Projection eines Kreises ein Kreis ist, unmittelbar folgt aus der obigen Form der Gleichung des Kreiskegels.

244.) Dass § 239 die allgemeinste Form der Gleichung des Kegels zweiter Ordnung liefert, wenn die Spitze im Anfangspunkte liegt, folgt aus den Resultaten des nächsten Kapitels. In § 249 wird gezeigt, dass die Gleichung eines Kegels zweiter Ordnung immer auf die Form gebracht werden kann

$$2\Sigma . S\alpha\varrho S\beta\varrho + A\varrho^2 = 0 .$$

Dies kann man schreiben

$$S\varrho\varphi\varrho = 0 ,$$

wo φ die selbstconjugirte lineare Vectorfunction

$$\varphi\varrho = \Sigma . V\alpha\varrho\beta + (A + \Sigma S\alpha\beta)\varrho$$

ist. Nach § 168 können wir dies umformen in

$$\varphi\varrho = p\varrho + V . \lambda\varrho\mu ,$$

und die allgemeine Gleichung des Kegels wird:

$$(p - S\lambda\mu)\varrho^2 + 2S\lambda\varrho S\mu\varrho = 0 ,$$

und dies ist die Form des § 239.

245.) Nehmen wir die Form:

$$S\varrho\varphi\varrho = 0$$

als die einfachste; wir erhalten durch Differentiation

$$Sd\varrho\varphi\varrho + S\varrho d\varphi\varrho = 0 ,$$

oder

$$2Sd\varrho\varphi\varrho = 0 ;$$

$\varphi\varrho$ steht also senkrecht auf der Tangentialebene am Endpunkte von ϱ. Die Gleichung dieser Ebene ist also, wenn wir unter ω den Vector eines Punktes derselben verstehen:

$$S\varphi\varrho(\omega - \varrho) = 0 ,$$

oder, wenn wir die Gleichung des Kegels berücksichtigen:

$$S\omega\varphi\varrho = 0 .$$

246.) *Die Gleichung des Kegels der Normalen auf den Tangentialebenen eines gegebenen Kegels kann leicht aus der Gleichung des Kegels selbst gebildet werden.*

Wir können diese Gleichung nämlich schreiben:

$$S(\varphi^{-1}\varphi\varrho)\varphi\varrho = 0 .$$

Setzen wir $\varphi\varrho = \sigma$, ein Vector des neuen Kegels, so wird die Gleichung

$$S\sigma\varphi^{-1}\sigma = 0 .$$

Zahlreiche merkwürdige Eigenschaften dieser zusammengehörigen Kegel und der entsprechenden sphärischen Kegelschnitte lassen sich

unmittelbar aus diesen Gleichungen herleiten. Wir überlassen dies dem Leser.

247.) Zum Schluss wollen wir *die Gleichung eines Kreiskegels aufstellen, wenn fünf Vectorseiten desselben gegeben sind; d. h. man suche die Gleichung des Kegels zweiter Ordnung, dessen Spitze im Anfangspunkte liegt und auf dessen Fläche die Vectoren* α, β, γ, δ, ε *liegen.*

Setzen wir

$$0 = S.V(V\alpha\beta\, V\delta\varepsilon)\, V(V\beta\gamma\, V\varepsilon\varrho)\, V(V\gamma\delta\, V\varrho\alpha) \quad \ldots\ldots (1)$$

so ist dies die Gleichung eines Kegels, dessen Spitze im Anfangspunkte liegt, denn die Gleichung ändert sich nicht, wenn man $x\varrho$ setzt statt ϱ; es ist weiter die Gleichung eines Kegels zweiten Grades, da ϱ nur zweimal auftritt. Dann sind die Vectoren α, β, γ, δ, ε Seiten des Kegels, denn setzt man irgend einen derselben an Stelle von ϱ, so wird der Gleichung genügt.

Setzen wir z. B. β an Stelle von ϱ, so wird die Gleichung:

$$0 = S.V(V\alpha\beta\, V\delta\varepsilon)\, V(V\beta\gamma\, V\varepsilon\beta)\, V(V\gamma\delta\, V\beta\alpha)$$
$$= S.V(V\alpha\beta\, V\delta\varepsilon\{V\beta\alpha S.V\gamma\delta\, V\beta\gamma\, V\varepsilon\beta - V\gamma\delta\, S.V\beta\alpha\, V\beta\gamma\, V\varepsilon\beta\}.$$

Das erste Glied verschwindet, weil

$$S.V(V\alpha\beta\, V\delta\varepsilon)\, V\beta\alpha = 0,$$

das zweite weil

$$S.V\beta\alpha\, V\beta\gamma\, V\varrho\beta = 0,$$

denn die drei Vectoren $V\beta\alpha$, $V\beta\gamma$, $V\varepsilon\beta$ sind alle senkrecht auf β, liegen also in einer Ebene.

Wie Hamilton bemerkt, ist dies ein sehr einfacher Beweis von Pascal's Satz; denn (1) ist die Bedingung dafür, dass die Schnittlinien der Ebenen von α, β und δ, ε; von β, γ und ε, ϱ; von γ, δ und ϱ, α in einer Ebene liegen; wollen wir dies für einen beliebigen ebenen Schnitt des Kegels aussprechen, so haben wir den Satz: Sollen die Schnittpunkte der drei Paare entgegengesetzter Seiten eines in eine Curve eingeschriebenen Sechsecks stets auf einer Geraden liegen, so muss die Curve ein Kegelschnitt sein.

Uebungsbeispiele zu Kapitel VII.

1. Auf dem Vector eines Punktes P in der Ebene

$$S\alpha\varrho = 1$$

nimmt man einen Punkt Q so, dass $QO.OP$ constant ist; man stelle die Gleichung des geometrischen Ortes von Q auf.

2. Welche Kugeln schneiden die geometrischen Orte von P und Q in 1. so, dass beide Schnittcurven auf einem Kegel liegen, dessen Spitze in O liegt?

3. Eine Kugel berührt eine feste Ebene, und schneidet eine feste Kugel. Ist der Berührungspunkt mit der Ebene gegeben, so enthält die Schnittebene der Kugeln eine feste Gerade.

Man bestimme den geometrischen Ort des Mittelpunktes der veränderlichen Kugel, wenn die Ebene ihres Schnittes mit der festen Kugel durch einen gegebenen Punkt geht.

4. Man suche die Halbmesser der Kugeln, welche gleichzeitig die vier gegebenen Ebenen berühren:

$$S\alpha\varrho = 0, \quad S\beta\varrho = 0, \quad S\gamma\varrho = 0, \quad S\delta\varrho = 1.$$

[Welches ist der körperliche Inhalt des Tetraeders, welches diese Ebenen einschliessen?]

5. Wenn eine bewegliche Gerade, die durch den Anfangspunkt geht, mit einer beliebigen Anzahl von festen Geraden die Winkel ϑ, ϑ_1, ϑ_2, u. s. w. einschliesst, der Art, dass

$$a\cos\vartheta + a_1\cos\vartheta_1 + \ldots = \text{constans},$$

wo a_1, a_2 ... constante Scalaren sind, so beschreibt die Gerade einen geraden Kegel.

6. Die Bedingungen aufzustellen, dass

$$S\varrho\varphi\varrho = 0$$

einen *geraden* Kegel darstelle.

7. Welche Eigenschaft eines Kegels (oder sphärischen Kegelschnittes) wird unmittelbar durch die folgende Form der Gleichung ausgedrückt:

$$S.\iota\varrho\varkappa\varrho = 0?$$

8. Welches sind die Bedingungen, damit die Flächen, welche durch $S\varrho\varphi\varrho = 0, \quad S.\iota\varrho\varkappa\varrho = 0$ dargestellt werden, zu Ebenen werden?

9. Man bestimme den geometrischen Ort der Spitzen aller geraden Kegel, die eine gemeinschaftliche Ellipse zur Basis haben.

10. Zwei gerade Kreiskegel haben parallele Achsen; man zeige, dass die orthogonale Projection ihrer Schnittlinie auf die Ebene ihrer Achsen eine Parabel ist.

11. Zwei feste Kugeln sind gegeben; jede Kugel, die diese in gegebenen Winkeln schneidet, berührt zwei andere feste Kugeln, und schneidet eine dritte rechtwinklig.

12. Eine Kugel liege auf einem Tische; die Breite des elliptischen Schattens, welcher gebildet wird durch Strahlen, die von einem festen Punkte ausgehen, ist unabhängig von der Lage der Kugel.

13. Man bilde die Gleichung eines Kegels, der einen gegebenen Kreisschnitt hat und eine gegebene Achse. Man bestimme die Normale des antiparallelen Schnittes.

14. Die Basis eines sphärischen Dreiecks ist gegeben, und das

Product der Cosinus der Seiten; der geometrische Ort der Spitze ist dann ein sphärischer Kegelschnitt; die Pole der cyklischen Bögen desselben sind die Endpunkte der gegebenen Basis.

15. (Hamilton, Bishop Law's Premium Ex.* 1858.)

(*a*) Welche Eigenschaft eines sphärischen Kegelschnitts wird unmittelbar gegeben durch die Gleichung:

$$S\frac{\varrho}{\alpha}\,S\frac{\beta}{\varrho} = 1\,?$$

(*b*) Die Gleichung

$$(V\lambda\varrho)^2 + (S\mu\varrho)^2 = 0$$

stellt ebenfalls einen Kegel zweiter Ordnung dar; λ ist eine Focallinie, und μ ist senkrecht auf der entsprechenden Leitebene.

(*c*) Welche Eigenschaft eines sphärischen Kegelschnitts liefert die Gleichung unmittelbar?

16. Man zeige, dass alle Dreiecke, welche durch Tangenten an einen sphärischen Kegelschnitt und durch die cyklischen Bögen begrenzt werden, gleichen Inhalt haben.

17. Man zeige, dass der geometrische Ort des Punktes, für welchen die Summe der Bogenentfernungen von zwei festen Punkten auf einer Kugel constant ist, ein sphärischer Kegelschnitt ist.

18. Legt man zwei Tangentialebenen an einen Kreiskegel, so sind die vier Geraden, in welchen sie die cyklischen Ebenen schneiden, Seiten eines geraden Kegels.

19. Man suche die Gleichung eines Kegels, dessen Seiten die Schnittlinien sind von aufeinander senkrecht stehenden Tangentialebenen eines gegebenen Kreiskegels.

20. Die Bedingungen aufzustellen dafür, dass fünf Punkte auf einer Kugel liegen.

21. Welche Fläche wird dargestellt durch

$$\varrho^2 = x\alpha^2 + y\beta^2 + z\gamma^2\,?$$

wo

$$\varrho = x\alpha + y\beta + z\gamma;$$

α, β, γ sind gegebene Vectoren, x, y, z sind veränderliche Scalaren.

22. Man stelle die Gleichung auf von dem Kegel, dessen Seiten die Winkel halbiren, welche eine feste Gerade bildet mit jeder Geraden in einer festen Ebene, die die feste Gerade schneidet.

Welche Eigenschaft eines sphärischen Kegelschnitts wird unmittelbar durch dies Resultat gegeben?

---

* Bischof Law stiftete einen Preis, genannt Bishop Law's Premium.

Kapitel VIII.

Flächen zweiter Ordnung.

248.) Die allgemeine Scalargleichung zweiten Grades in dem Vector ϱ enthält offenbar ein Glied, das unabhängig ist von ϱ, Glieder von der Form $S.a\varrho b$, welche die erste Potenz von ϱ enthalten, und andere von der Form $S.a\varrho b\varrho c$, in welchen das Quadrat von ϱ vorkommt; a, b, c u. s. w. sind constante Quaternionen.

Das Glied $S.a\varrho b$ kann geschrieben werden

$$S.\varrho V(ba),$$

oder:

$$S.(Sa+Va)\varrho(Sb+Vb) = SaS.\varrho Vb + SbS.\varrho Va + S.\varrho Vb Va;$$

jedes dieser Glieder kann auf die Form gebracht werden $S\gamma\varrho$, wo γ ein bekannter Vector ist.

Dem entsprechend kann das Glied $S.a\varrho b\varrho c$*) auf eine Reihe von Gliedern zurückgeführt werden, deren jedes eine der folgenden Formen hat:

$$A\varrho^2, \qquad (S\alpha\varrho)^2, \qquad S\alpha\varrho S\beta\varrho.$$

Der zweite Ausdruck ist nur ein specieller Fall des dritten. Führen wir noch der Bequemlichkeit halber den numerischen Factor 2 ein, so können wir die allgemeine Scalargleichung des zweiten Grades schreiben:

$$2\Sigma.S\alpha\varrho S\beta\varrho + A\varrho^2 + 2S\gamma\varrho = C \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

249.) Verlegen wir den Anfangspunkt nach D, wo $\overline{OD} = \delta$, so wird ϱ zu $\varrho + \delta$ und die Gleichung erhält die Form

$$2\Sigma.S\alpha\varrho S\beta\varrho + A\varrho^2 + 2\Sigma(S\alpha\varrho S\beta\delta + S\beta\varrho S\alpha\delta) + 2AS\delta\varrho$$
$$+ 2S\gamma\varrho + 2\Sigma.S\alpha\delta S\beta\delta + A\delta^2 + 2S\gamma\delta - C = 0.$$

Die erste Potenz von ϱ fällt weg, das heisst *die Fläche ist auf ihren Mittelpunkt bezogen*, wenn

$$\Sigma(\alpha S\beta\delta + \beta S\alpha\delta) + A\delta + \gamma = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

eine Vectorgleichung ersten Grades, welche im allgemeinen einen

---

*) Denn $S.a\varrho b\varrho c = S.ca\varrho b\varrho = S.a'\varrho b\varrho = (2Sa'Sb - Sa'b)\varrho^2 + 2Sa'\varrho Sb\varrho$; in besonderen Fällen kann $Va' = Vb$ sein.

einzigen bestimmten Werth für δ liefert, nach dem Verfahren des Kapitel V. [Es würde uns über die Grenzen eines elementaren Lehrbuches hinausführen, wollten wir die speciellen Fälle betrachten, in denen (2) eine Gerade oder eine Ebene darstellt, von denen jeder Punkt Mittelpunkt der Fläche ist. Die Methoden, die bei solchen speciellen Fällen in Anwendung kommen, sind in dem angeführten Kapitel ausführlich besprochen worden.] Hat δ diesen Werth und setzt man

$$D = C - 2S\gamma\delta - A\delta^2 - 2\Sigma . S\alpha\delta S\beta\delta ,$$

so wird die Gleichung

$$2S . S\alpha\varrho S\beta\varrho + A\varrho^2 = D .$$

Ist $D = 0$, so wird die Fläche zur Kegelfläche (diesen Fall haben wir im vorigen Kapitel behandelt); ist D von Null verschieden, so ist die Fläche ein Ellipsoid oder Hyperboloid. Wenn wir nicht ausdrücklich anders bemerken, so wollen wir die Fläche, wenn D nicht Null ist, als Ellipsoid betrachten. Wir umgehen dadurch für den Augenblick einige ziemlich schwierige Betrachtungen.

Dividiren wir mit D, was nur die Tensoren der Constanten ändert, so erhalten wir die Gleichung der Mittelpunktflächen zweiter Ordnung (mit Ausnahme des Kegels) in der Form:

$$2\Sigma(S\alpha\varrho S\beta\varrho) + g\varrho^2 = 1. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

250.) Differentiiren wir, so folgt:

$$2\Sigma\{S\alpha d\varrho S\beta\varrho + S\alpha\varrho S\beta d\varrho\} + 2gS\varrho d\varrho = 0,$$

oder $$S . d\varrho\{\Sigma(\alpha S\beta\varrho + \beta S\alpha\varrho) + g\varrho\} = 0 .$$

Nach § 137 ist also die Tangentialebene:

$$S(\omega - \varrho)\{\Sigma(\alpha S\beta\varrho + \beta S\alpha\varrho) + g\varrho\} = 0,$$

d. h. $$S . \omega\{\Sigma(\alpha S\beta\varrho + \beta S\alpha\varrho) + g\varrho\} = 1 \text{ nach (3)}.$$

Setzen wir

$$\nu = \Sigma(\alpha S\beta\varrho + \beta S\alpha\varrho) + g\varrho \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

so wird die Gleichung der Tangentialebene

$$S\nu\omega = 1;$$

die Gleichung der Fläche selbst: $S\nu\varrho = 1$.

Da nun ν^{-1} auf der Tangentialebene senkrecht steht und der Gleichung derselben genügt, so ist es das Vectorperpendikel vom Anfangspunkt auf die Tangentialebene; ν nennt Hamilton „Vector of proximity“.

251.) Hamilton benutzt für ν, welches eine lineare Vectorfunction von ϱ ist, die Bezeichnung $\varphi\varrho$, wo φ eine Functionaloperation darstellt, wie in Kapitel V. Der Deutlichkeit wegen wollen

wir einen Theil jener Betrachtungen hier wiederholen, besonders für diejenigen unserer Leser, welche sich nur mit den elementarsten Theilen jenes Abschnittes vertraut gemacht haben.

Wir haben also:

$$\varphi\varrho = \Sigma(\alpha S\beta\varrho + \beta S\alpha\varrho) + g\varrho.$$

Aus dieser Definition von φ folgt:

(*a*) $\varphi(\varrho+\sigma) = \varphi\varrho + \varphi\sigma$ u. s. w. für beliebig zwei oder mehr Vectoren.

(*b*) $\varphi(x\varrho) = x\varphi\varrho$, ein specieller Fall von (*a*), wenn x eine Scalar ist.

(*c*) $d\varphi\varrho = \varphi(d\varrho)$.

(*d*) $S\sigma\varphi\varrho = \Sigma(S\alpha\sigma S\beta\varrho + S\beta\sigma S\alpha\varrho) + g\varrho = S\varrho\varphi\sigma$,

oder φ ist in diesem Falle selbstconjugirt.

Diese letzte Eigenschaft ist von grosser Wichtigkeit.

252.) Wir können also jetzt die allgemeine Gleichung der Mittelpunktflächen zweiten Grades (mit Ausschluss der Kegel) schreiben:

$$S\varrho\varphi\varrho = 1. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Differentiirt man:

$$Sd\varrho\varphi\varrho + S\varrho d\varphi\varrho = 0.$$

Wenden wir (*c*) und (*d*) an auf das zweite Glied der linken Seite, so folgt:

$$2\,S\varphi\varrho d\varrho = 0;$$

wie in § 250, aber auf einfachere Weise, erhalten wir die Gleichung der Tangentialebene am Endpunkte von ϱ:

$$S(\omega-\varrho)\varphi\varrho = 0,$$

oder

$$S\omega\varphi\varrho = S\varrho\varphi\varrho = 1.$$

Geht diese Ebene durch den Punkt A ($\overline{OA} = \alpha$), so erhalten wir:

$$S\alpha\varphi\varrho = 1,$$

oder nach (*d*)

$$S\varrho\varphi\alpha = 1,$$

für alle möglichen Berührungspunkte.

Dies ist also die Gleichung der Contactebene der von A ausgehenden Tangentialebenen.

253.) *Man suche den Berührungskegel, dessen Spitze in A liegt.*

Wir bemerken, dass

$$(S\varrho\varphi\varrho - 1) + p(S\varrho\varphi\alpha - 1)^2 = 0,$$

wo p eine beliebige Scalar ist, die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung ist, welche das Ellipsoid *berührt* längs der Schnittlinie desselben mit der Ebene. Geht diese Fläche durch A, so wird

$$(S\alpha\varphi\alpha - 1) + p(S\alpha\varphi\alpha - 1)^2 = 0;$$

hieraus ist p bestimmt.

Unsere Gleichung wird also:

$$(S\varrho\varphi\varrho - 1)(S\alpha\varphi\alpha - 1) - (S\varrho\varphi\alpha - 1)^2 = 0 \quad \ldots \quad (1)$$

und dies ist der gesuchte Kegel. Um uns davon zu überzeugen, verlegen wir den Anfangspunkt nach A, indem wir $\varrho + \alpha$ an Stelle von ϱ setzen. Berücksichtigen wir (a) und (d), so folgt:

$$(S\varrho\varphi\varrho + 2S\varrho\varphi\alpha + S\alpha\varphi\alpha - 1)(S\alpha\varphi\alpha - 1) - (S\varrho\varphi\alpha + S\alpha\varphi\alpha - 1)^2 = 0,$$

oder

$$S\varrho\varphi\varrho(S\alpha\varphi\alpha - 1) - (S\varrho\varphi\alpha)^2 = 0;$$

dies ist homogen in $T\varrho^2$, und ist also die Gleichung eines Kegels.

Es sei nun A unendlich weit entfernt; wir setzen in (1) $x\alpha$ an Stelle von α, wo x unendlich gross sein soll; lässt man nun alle Glieder weg, die nicht mit x^2 behaftet sind, so erhält man die Gleichung des Cylinders, der durch die α parallelen Tangenten gebildet wird:

$$(S\varrho\varphi\varrho - 1)S\alpha\varphi\alpha - (S\varrho\varphi\alpha)^2 = 0.$$

254.) Um die Natur der Fläche näher kennen zu lernen, wollen wir *den geometrischen Ort der Mittelpunkte paralleler Sehnen aufsuchen.*

Diese Sehnen seien parallel α; ist ω der Vector des Mittelpunktes einer derselben, dann sind $\omega + x\alpha$ und $\omega - x\alpha$ gleichzeitige Werthe von ϱ, welche der Gleichung (1) § 252 genügen müssen. D. h.:

$$S.(\omega \pm x\alpha)\varphi(\omega \pm x\alpha) = 1;$$

nach (a) und (d) erhalten wir hieraus:

$$S\omega\varphi\omega + x^2 S\alpha\varphi\alpha = 1,$$

$$S\omega\varphi\alpha = 0. \quad \ldots \quad (1)$$

Die letzte Gleichung zeigt, dass der geometrische Ort des Endpunktes von ω, des Mittelpunktes der α parallelen Sehne, eine Ebene ist, die durch den Mittelpunkt geht und auf $\varphi\alpha$ senkrecht steht; diese Ebene ist also parallel der Tangentialebene in dem Punkte, wo OA die Fläche schneidet. Aus (d) folgt, dass diese Relation reciprok ist, d. h. ist β irgend ein Werth von ω, also irgend ein Vector in der Ebene (1), dann ist α ein Vector in einer Diametralebene, die alle β parallele Sehnen halbirt. Die Gleichungen dieser Ebenen sind:

$$S\omega\varphi\alpha = 0,$$

$$S\omega\varphi\beta = 0.$$

Ist nun $V.\varphi\alpha\varphi\beta = \gamma$ ihre Schnittlinie, dann haben wir:

$$\left.\begin{aligned} S\gamma\varphi\alpha = 0 = S\alpha\varphi\gamma, \\ S\gamma\varphi\beta = 0 = S\beta\varphi\gamma, \\ S\beta\varphi\alpha = 0 = S\alpha\varphi\beta, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2)$$

und (1) gibt

Es gibt also *eine unendliche Zahl von Systemen dreier Vectoren α, β, γ, so beschaffen, dass alle dem einen jener Vectoren parallelen*

Sehnen halbirt werden durch die Diametralebene, welche die beiden anderen enthält.

255.) Nach § 23 kann jeder Vector dargestellt werden als lineare Function von drei beliebigen, nicht in einer Ebene gelegenen Vectoren. Es sei also

$$\varrho = x\alpha + y\beta + z\gamma,$$

wo nach dem vorigen Paragraphen

$$\begin{aligned} S\alpha\varphi\beta &= S\beta\varphi\alpha = 0, \\ S\alpha\varphi\gamma &= S\gamma\varphi\alpha = 0, \\ S\beta\varphi\gamma &= S\gamma\varphi\beta = 0. \end{aligned}$$

Und es sei weiter

$$\left.\begin{aligned} S\alpha\varphi\alpha &= 1 \\ S\beta\varphi\beta &= 1 \\ S\gamma\varphi\gamma &= 1 \end{aligned}\right\},$$

so dass also α, β, γ conjugirte Halbmesser der betrachteten Fläche sind.

Führen wir diesen Werth von ϱ in die Gleichung der Fläche ein, berücksichtigen die Gleichungen in α, β, γ und (a), (b), (d), so folgt:

$$\begin{aligned} S\varrho\varphi\varrho &= S(x\alpha + y\beta + z\gamma)\varphi(x\alpha + y\beta + z\gamma) \\ &= x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{aligned}$$

Um dies in Cartesische Coordinaten umzusetzen, bemerken wir, dass x das Verhältniss ist der Projection von ϱ auf α, zu α selbst, u. s. w. Nehmen wir also die conjugirten Halbmesser zu den ξ-, η-, ζ-Achsen und bezeichnen ihre Länge mit a, b, c, so wird obige Gleichung

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1,$$

die gewöhnliche Gleichung des auf conjugirte Durchmesser bezogenen Ellipsoids.

256.) Schreiben wir $-\psi^2$ statt φ, so nehmen diese Gleichungen eine merkwürdige Form an.

Wir wollen vorläufig annehmen, was wir später beweisen wollen, dass dies Halbiren oder Wurzelausziehen einer Vectorfunction zulässig ist und dass die neue lineare Vectorfunction dieselben Eigenschaften (a), (b), (c), (d) § 251 hat, wie die alte. Die Gleichung der Fläche wird jetzt:

$$S\varrho\psi^2\varrho = -1,$$

oder

$$S\psi\varrho\psi\varrho = -1,$$

oder schliesslich

$$T\psi\varrho = 1.$$

Vergleichen wir dies mit der Gleichung der Einheitskugel

$$T\varrho = 1,$$

so sehen wir unmittelbar die Verwandtschaft der beiden Flächen.

Die Kugel kann in ein Ellipsoid umgeformt werden (oder vice versa), durch eine lineare Deformation eines jeden Vectors; der Operator ist die Function ψ oder ihre Reciproke. (Man sehe das Kapitel über Kinematik.)

257.) Die Gleichungen (2) § 254 werden jetzt

$$S\alpha\psi^2\beta = 0 = S\psi\alpha\psi\beta \quad \text{u. s. w.} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

so dass $\psi\alpha$, $\psi\beta$, $\psi\gamma$ *die Vectoren der Einheitskugel, welche conjugirten Halbmessern des Ellipsoids entsprechen, ein rechtwinkliges System bilden.*

Wir können hier bemerken, dass, da das auf die Hauptachsen bezogene Ellipsoid ein specieller Fall von § 255 ist, wir jetzt annehmen können, i, j, k haben jene Richtungen und die Gleichung ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

In Quaternionen ist dies

$$S\varrho\varphi\varrho = \frac{(Si\varrho)^2}{a^2} + \frac{(Sj\varrho)^2}{b^2} + \frac{(Sk\varrho^2)}{c^2} = 1.$$

Wir nehmen hier stillschweigend an, dass derartige Achsen bestehen; wir können aber immer nach Hamilton's Methode, die in Kapitel V entwickelt wurde, die cubische Gleichung aufstellen, welche dieselben liefern.

Aus jener letzten Gleichung sieht man, dass

$$\varphi\varrho = + \frac{iSi\varrho}{a^2} + \frac{jSj\varrho}{b^2} + \frac{kSk\varrho}{c^2},$$

und

$$\psi\varrho = - \left(\frac{iSi\varrho}{a} + \frac{jSj\varrho}{b} + \frac{kSk\varrho}{c} \right).$$

Man überzeugt sich von der Richtigkeit der letzten Gleichung, indem man zeigt, dass

$$\psi^2\varrho = -\varphi\varrho.$$

Aus diesen Ausdrücken sieht man, dass ψ wirklich die Eigenschaften hat, die wir ihm im vorigen Paragraphen zuschrieben.

Da $Si\varrho = -x$ u. s. w., wo x, y, z die Cartesischen Coordinaten, bezogen auf die Hauptachsen, sind, können wir leicht alle Quaternionenresultate, welche sich auf das Ellipsoid beziehen, in gewöhnliche Coordinaten übertragen.

258.) Ehe wir dazu übergehen, andere Formen der Ellipsoidengleichung abzuleiten, wollen wir die schon gegebenen benutzen, um einige Aufgaben zu lösen.

Den geometrischen Ort des Punktes zu bestimmen, für welchen

das Perpendikel vom Mittelpunkte auf seine Polarebene eine constante Länge hat.

Ist ω der Vector des Punktes, so ist dessen Polarebene

$$S\varrho\varphi\omega = 1$$

und die Länge der Senkrechten von O ist

$$\frac{1}{T\varphi\omega} \quad (\S\ 208).$$

Der gesuchte geometrische Ort ist also

$$T\varphi\omega = C$$

$$S\omega\varphi^2\omega = -C^2,$$

ein concentrisches Ellipsoid mit den Achsen in derselben Richtung, wie die des ersten.

Nach § 257 ist die Gleichung in Cartesischen Coordinaten

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = C^2.$$

259.) *Den geometrischen Ort eines Punktes zu bestimmen, dessen Entfernung von einem festen Punkte stets in einem gegebenen Verhältnisse steht zu einer Entfernung von einer festen Geraden.*

Es sei $\varrho = x\beta$ die gegebene Gerade, und A $(\overline{OA} = \alpha)$ der feste Punkt. Es sei

$$S\alpha\beta = 0.$$

Für jeden der gesuchten Punkte hat man dann

$$T(\varrho - \alpha) = eTV\beta\varrho,$$

eine Fläche zweiter Ordnung, die man schreiben kann

$$\varrho^2 - 2S\alpha\varrho + \alpha^2 = e^2(S^2\beta\varrho - \beta^2\varrho^2).$$

Der Mittelpunkt sei in δ, und wir verlegen den Anfangspunkt dorthin; wir erhalten

$$\varrho^2 + 2S\varrho(\delta - \alpha) + (\delta - \alpha)^2 = e^2\{S^2.\beta(\varrho + \delta) - \beta^2(\varrho + \delta)^2\};$$

soll die erste Potenz von ϱ verschwinden, so muss

$$\delta - \alpha = e^2(\beta S\beta\delta - \beta^2\delta)$$

sein, eine lineare Gleichung für δ. Um dieselbe aufzulösen, bemerken wir, dass $S\alpha\beta = 0$; operiren wir mit $S.\beta$, so folgt

$$(1 - e^2\beta^2 + e^2\beta^2)S\beta\delta = S\beta\delta = 0.$$

Hieraus $$\delta - \alpha = -e^2\beta^2\delta$$

oder $$\delta = \frac{\alpha}{1 + e^2\beta^2}.$$

Beziehen wir die Gleichung auf diesen Punkt als Anfangspunkt, so erhalten wir:

$$(1 + e^2\beta^2)\varrho^2 - e^2S^2\beta\varrho + \frac{e^2\beta^2\alpha^2}{1 + e^2\beta^2} = 0.$$

Es ist dies die Gleichung einer Umdrehungsfläche zweiter Ordnung, deren Achse β parallel ist; denn die Schnittcurve dieser Fläche mit einer Ebene, $S\beta\varrho = a$, senkrecht auf dieser Achse, liegt auf der Kugel:

$$\varrho^2 = \frac{e^2 a^2}{1 + e^2\beta^2} - \frac{e^2\beta^2\alpha^2}{(1 + e^2\beta^2)^2}.$$

In der That, ist der gegebene Punkt der Brennpunkt eines Meridianschnittes eines abgeplatteten Rotationsellipsoids, dann ist die feste Gerade die Directrix desselben.

260.) *Eine durch den Mittelpunkt eines Ellipsoids gehende Kugelfläche wird durch eine Reihe von Kugeln geschnitten, deren Mittelpunkte auf dem Ellipsoid liegen und welche ebenfalls durch den Mittelpunkt desselben gehen; man suche die Umhüllende der Schnittebenen.*

Die erste Kugel sei

$$(\varrho - \alpha)^2 = \alpha^2$$

oder $$\varrho^2 - 2S\alpha\varrho = 0,$$

eine der andern: $$\varrho^2 - 2S\omega\varrho = 0,$$

wo $$S\omega\varphi\omega = 1.$$

Die Schnittebene ist

$$S(\omega - \alpha)\varrho = 0.$$

Für die Umhüllende hat man also (man sehe das folgende Kapitel)

$$\left.\begin{aligned} S\omega'\varphi\omega &= 0, \\ S\omega'\varrho &= 0, \end{aligned}\right\} \text{ wo } \omega' = d\omega,$$

oder $$\varphi\omega = x\varrho, \qquad \{Vx = 0\},$$

d. h. $$\omega = x\varphi^{-1}\varrho.$$

Hieraus $$x^2 S\varrho\varphi^{-1}\varrho = 1,$$

und $$xS\varrho\varphi^{-1}\varrho = S\alpha\varrho,$$

eliminirt man x: $$S\varrho\varphi^{-1}\varrho = (S\alpha\varrho)^2,$$

ein Kegel zweiter Ordnung.

261.) *Von einem Punkte des äussern zweier concentrischen Ellipsoide wird ein Tangentenkegel an das innere Ellipsoid gelegt; man bestimme die Umhüllende der Berührungsebene.*

Ist $S\omega\varphi\omega = 1$ das äussere, $S\varrho\psi\varrho = 1$ das innere Ellipsoid, wo φ und ψ zwei beliebige selbstconjugirte lineare Vectorfunctionen sind, so ist die Contactebene

$$S\omega\psi\varrho = 1;$$

für die Umhüllende hat man:

$$\left.\begin{aligned} S\omega'\psi\varrho &= 0, \\ S\omega'\varphi\omega &= 0, \end{aligned}\right\}$$

hieraus: $$\varphi\omega = x\psi\varrho,$$

oder $$\omega = x\varphi^{-1}\psi\varrho.$$

Dies liefert $$xS.\psi\varrho\varphi^{-1}\psi\varrho = 1,$$
und $$x^2S.\psi\varrho\varphi^{-1}\psi\varrho = 1,$$
eliminirt man x: $$S.\psi\varrho\varphi^{-1}\psi\varrho = 1,$$
oder $$S.\varrho\psi\varphi^{-1}\psi\varrho = 1,$$
wieder ein concentrisches Ellipsoid, da $\psi\varphi^{-1}\psi$ eine lineare Vectorfunction ist; wir bezeichnen dieselbe mit χ. Wir können die Gleichung also schreiben:

$$S\varrho\chi\varrho = 1.$$

262.] *Man bestimme den geometrischen Ort des Schnittpunktes der Tangentialebenen an den Endpunkten conjugirter Durchmesser.*

Sind α, β, γ die Vectorhalbmesser, so sind diese Ebenen:

$$\left.\begin{aligned} S\omega\psi^2\alpha &= -1,\\ S\omega\psi^2\beta &= -1,\\ S\omega\psi^2\gamma &= -1,\end{aligned}\right\}$$

mit den Bedingungen des § 257. Hieraus:

$$-\psi\omega S.\psi\alpha\psi\beta\psi\gamma = \psi\omega = \psi\alpha + \psi\beta + \psi\gamma \quad \text{nach § 92,}$$
und $$T\psi\omega = \sqrt{3},$$
da $\psi\alpha$, $\psi\beta$, $\psi\gamma$ ein rechtwinkliges System von Einheits-Vectoren bilden.

Wir können dies offenbar auch schreiben

$$S\omega\psi^2\omega = -3.$$

Der geometrische Ort ist also ein dem gegebenen Ellipsoid ähnliches, und ähnlich gelegenes Ellipsoid, aber grösser im Verhältniss von $\sqrt{3} : 1$.

263.) *Den geometrischen Ort der Schnittpunkte dreier Kugeln zu finden, deren Durchmesser conjugirte Halbmesser eines Ellipsoids sind.*

Ist α einer jener Halbmesser, also

$$S\alpha\psi^2\alpha = -1,$$

so ist die entsprechende Kugel

$$\varrho^2 - S\alpha\varrho = 0,$$
oder $$\varrho^2 - S\psi\alpha\psi^{-1}\varrho = 0;$$
ähnliche Gleichungen gelten für β und γ. Nach § 92 ist

$$\psi^{-1}\varrho S.\psi\alpha\psi\beta\psi\gamma = -\psi^{-1}\varrho = \varrho^2(\psi\alpha + \psi\beta + \psi\gamma).$$

Nimmt man Tensoren, so wird

$$T\psi^{-1}\varrho = \sqrt{3}\,T\varrho^2,$$
oder $$T\psi^{-1}\varrho^{-1} = \sqrt{3},$$
oder $$S\varrho\psi^{-2}\varrho = -3\varrho^4.$$

Es ist dies Fresnel's Elasticitätsfläche in der optischen Wellentheorie.

264.) Ehe wir weiter gehen, wollen wir einige nützliche Eigenschaften der Function φ in der Form, die wir jetzt benutzen, beweisen.

Also $$\varphi\varrho = \frac{iSi\varrho}{a^2} + \frac{jSj\varrho}{b^2} + \frac{kSk\varrho}{c^2}.$$

Wir haben $$\varrho = -iSi\varrho - jSj\varrho - kSk\varrho,$$

und augenscheinlich hat man:

$$\varphi i = -\frac{i}{a^2}, \qquad \varphi j = -\frac{j}{b^2}, \qquad \varphi k = -\frac{k}{c^2};$$

hieraus $$\varphi^2\varrho = -\frac{iSi\varrho}{a^4} - \frac{jSj\varrho}{b^4} - \frac{kSk\varrho}{c^4},$$

und $$\varphi^{-1}\varrho = a^2 iSi\varrho + b^2 jSj\varrho + c^2 kSk\varrho, \text{ u. s. w.}$$

Sind α, β, γ irgendwelche rechtwinklige Einheitsvectoren, so hat man:

$$S\alpha\varphi\alpha = \frac{(Si\alpha)^2}{a^2} + \frac{(Sj\alpha)^2}{b^2} + \frac{(Sk\alpha)^2}{c^2},$$

$$\text{u. s. w.} = \text{u. s. w.}$$

Da nun $$(Si\varrho)^2 + (Sj\varrho)^2 + (Sk\varrho)^2 = -\varrho^2,$$

so haben wir $S\alpha\varphi\alpha + S\beta\varphi\beta + S\gamma\varphi\gamma = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

Weiter:

$$S.\varphi\alpha\varphi\beta\varphi\gamma = S.\left(\frac{iSi\alpha}{a^2} + \ldots\right)\left(\frac{iSi\beta}{a^2} + \ldots\right)\left(\frac{iSi\gamma}{a^2} + \ldots\right)$$

$$= -\begin{vmatrix} \frac{Si\alpha}{a^2}, & \frac{Sj\alpha}{b^2}, & \frac{Sk\alpha}{c^2} \\ \frac{Si\beta}{a^2}, & \frac{Sj\beta}{b^2}, & \frac{Sk\beta}{c^2} \\ \frac{Si\gamma}{a^2}, & \frac{Sj\gamma}{b^2}, & \frac{Sk\gamma}{c^2} \end{vmatrix} = \frac{-1}{a^2b^2c^2}\begin{vmatrix} Si\alpha, & Sj\alpha, & Sk\alpha \\ Si\beta, & Sj\beta, & Sk\beta \\ Si\gamma, & Sj\gamma, & Sk\gamma \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{a^2b^2c^2}$$

u. s. w.

Diese elementaren Untersuchungen geben wir für diejenigen, die Kapitel V nicht gelesen haben. Der Leser kann alle diese Resultate auf weit einfachere Weise aus den Formeln jenes Abschnittes herleiten.

265.) *Man bestimme den geometrischen Ort der Punkte, von welchen aus sich drei aufeinander senkrecht stehende Tangenten an ein Ellipsoid legen lassen.*

Es sei ω der Vector eines jener Punkte, α, β, γ die Tangenten. Setzt man $(\omega + x\alpha)$ in die Gleichung der Fläche an Stelle von ϱ, so muss man für x zwei gleiche Werthe erhalten.

Also $$S(\omega + x\alpha)\varphi(\omega + x\alpha) = 1,$$

oder $$x^2 S\alpha\varphi\alpha + 2xS\omega\varphi\alpha + (S\omega\varphi\omega - 1) = 0,$$

und $$(S\omega\varphi\alpha)^2 = S\alpha\varphi\alpha(S\omega\varphi\omega - 1).$$

Addiren wir dies zu den entsprechenden Gleichungen in β und γ, so folgt:

$$(S\alpha\varphi\omega)^2+(S\beta\varphi\omega)^2+(S\gamma\varphi\omega)^2=(S\alpha\varphi\alpha+S\beta\varphi\beta+S\gamma\varphi\gamma)(S\omega\varphi\omega-1),$$

oder
$$-(\varphi\omega)^2=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)(S\omega\varphi\omega-1),$$

oder
$$S.\omega\left\{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\varphi+\varphi^2\right\}\omega=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2},$$

ein mit dem gegebenen concentrisches Ellipsoid.

266.) *Zieht man durch einen beliebigen Punkt im Innern eines Ellipsoids drei aufeinander senkrecht stehende Sehnen, so ist die Summe der Reciproken der auf den Sehnenabschnitten construirten Rechtecke constant.*

Aus der Bezeichnungsweise der vorigen Aufgabe, wo ω den Punkt gibt, von welchem die drei Sehnen ausgehen, sieht man, dass das Product der Werthe von x eines der betreffenden Rechtecke ist, negativ genommen.

Die gesuchte Summe ist also:

$$-\frac{\Sigma S\alpha\varphi\alpha}{S\omega\varphi\omega-1}=-\frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}{S\omega\varphi\omega-1}.$$

Dies hängt offenbar nur von $S\omega\varphi\omega$ ab, und nicht von den besonderen Richtungen von α, β, γ; dieser Ausdruck ändert sich also nicht, wenn ω der Vector eines beliebigen Punktes eines dem gegebenen Ellipsoid ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsoids ist.

Man kann den Ausdruck auch deuten, wenn jener Punkt ausserhalb des gegebenen Ellipsoids liegt.

267.) *Zieht man von einem beliebigen Punkte eines Ellipsoids drei rechtwinklige Vectoren, so geht die Ebene, welche die anderen Endpunkte enthält, durch einen festen Punkt. Man bestimme den geometrischen Ort jener Punkte, wenn der erste sich ändert.*

Mit der obigen Bezeichnungsweise haben wir:

$$S\omega\varphi\omega=1,$$

und
$$S(\omega+x\alpha)\varphi(\omega+x\alpha)=1;$$

hieraus
$$x=-2\frac{S\alpha\varphi\omega}{S\alpha\varphi\alpha}.$$

Die gesuchte Ebene geht durch den Endpunkt von

$$\omega-2\alpha\frac{S\alpha\varphi\omega}{S\alpha\varphi\alpha},$$

und durch die Endpunkte von zwei auf ähnliche Weise erhaltenen Vectoren. Diese Ebene geht also auch durch den Punkt, dessen Vector ist:

$$\vartheta = \omega - 2\frac{\alpha S\alpha\varphi\omega + \beta S\beta\varphi\omega + \gamma S\gamma\varphi\omega}{S\alpha\varphi\alpha + S\beta\varphi\beta + S\gamma\varphi\gamma},$$

oder $$\vartheta = \omega + \frac{2\varphi\omega}{m_2} \quad (\S\ 173);$$

der erste Theil jenes Satzes ist also bewiesen.

Wir haben aber auch:

$$\omega = \frac{m_2}{2}\left(\varphi + \frac{m_2}{2}\right)^{-1}\vartheta,$$

und aus der Gleichung des Ellipsoids erhalten wir:

$$\frac{{m_2}^2}{4} S.\vartheta\left(\varphi + \frac{m_2}{2}\right)^{-1}\varphi\left(\varphi + \frac{m_2}{2}\right)^{-1}\vartheta = 1,$$

die Gleichung eines concentrischen Ellipsoids.

268.) *Die Richtung der drei Vectoren zu bestimmen, welche parallel sind einem Systeme conjugirter Durchmesser in zwei Mittelpunktflächen zweiter Ordnung.*

Wir verlegen den Mittelpunkt der beiden Flächen nach dem Anfangspunkte; die Gleichungen seien dann:

$$\left.\begin{aligned} S\varrho\varphi\varrho &= 1 \quad \text{oder} \quad 0, \\ S\varrho\psi\varrho &= 1 \quad \text{oder} \quad 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Sind α, β, γ die gesuchten Vectoren, so muss nach § 254 sein:

$$\left.\begin{aligned} S\alpha\varphi\beta &= 0, \quad & S\alpha\psi\beta &= 0, \\ S\beta\varphi\gamma &= 0, \quad & S\beta\psi\gamma &= 0, \\ S\gamma\varphi\alpha &= 0, \quad & S\gamma\psi\alpha &= 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

hieraus $$\varphi\alpha \parallel V\beta\gamma \parallel \psi\alpha \quad \text{u. s. w.}$$

Die drei gesuchten Richtungen sind also die Wurzeln von

$$V.\varphi\varrho\psi\varrho = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Man sieht den Grund hiervon auf andere Weise ein; es heisst nämlich, *dass, wenn eine der Flächen sich gleichmässig ausdehnt oder zusammenzieht, sie die andere Fläche nacheinander in Punkten jener drei Vectoren berühren wird.*

Wir können (3) auf die beiden folgenden Formen bringen:

$$\left.\begin{aligned} V.\varrho\varphi^{-1}\psi\varrho &= 0, \\ V.\varrho\psi^{-1}\varphi\varrho &= 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

oder

und da φ und ψ gegebene Functionen sind, so finden wir die Lösung duch das Verfahren des Kapitel V.

[Bemerkung. Da $\varphi^{-1}\psi$ und $\psi^{-1}\varphi$ nicht im allgemeinen selbstconjugirte Functionen sind, so bedeutet (4) nicht, dass α, β, γ den Hauptachsen der Flächen

$$S.\varrho\varphi^{-1}\psi\varrho = 1 \quad \text{und} \quad S.\varrho\psi^{-1}\varphi\varrho = 1$$

parallel sind.

In *diesen* Scalargleichungen ist es gleichgültig, ob $\varphi^{-1}\psi$ selbstconjugirt ist oder nicht; aber es ist dies von grosser Wichtigkeit, wenn wir mit Vectorgleichungen zu thun haben.]

Sind zwei Flächen zweiter Ordnung gegeben, so gibt es im allgemeinen ein System Cartesischer Achsen, welche parallel sind den Richtungen conjugirter Durchmesser in jeder Fläche zweiten Grades, welche durch die Schnittlinie der beiden Flächen geht.

Die Gleichung einer jeden derartigen Fläche, welche durch die Schnittlinie von

$$S\varrho\varphi\varrho = 1 \quad \text{und} \quad S(\varrho-\alpha)\psi(\varrho-\alpha) = e$$

geht, ist

$$fS\varrho\varphi\varrho - S(\varrho-\alpha)\psi(\varrho-\alpha) = f - e,$$

wo f und e Scalaren sind.

Die Achsen dieser Fläche hängen nur ab von dem Gliede

$$S\varrho(f\varphi-\psi)\varrho.$$

Das System der conjugirten Durchmesser, welches in allen jenen Flächen dieselben Richtungen hat, wird gegeben durch die Wurzeln von

$$V(f\varphi-\psi)\varrho(f_1\varphi-\psi)\varrho = 0 \quad \text{oder} \quad V\varphi\varrho\psi\varrho = 0.$$

Man hätte dies Resultat auch ohne Rechnung erhalten können.

Der geometrische Ort der Mittelpunkte ist gegeben durch die Gleichung

$$(\psi - f\varphi)\varrho - \psi\alpha = 0,$$

wo f eine Scalarveränderliche ist.

269.) *Die Gleichung des Ellipsoids aufzustellen, wenn drei conjugirte Halbmesser gegeben sind.*

Diese Vectorhalbmesser seien α, β, γ.

$$S\varrho\varphi\varrho = 1$$

sei die Gleichung des Ellipsoids. Nach § 255 ist dann:

$$\begin{aligned} S\alpha\varphi\alpha &= 1, & S\alpha\varphi\beta &= 0,\\ S\beta\varphi\beta &= 1, & S\beta\varphi\gamma &= 0,\\ S\gamma\varphi\beta &= 1, & S\gamma\varphi\alpha &= 0, \end{aligned}$$

die nothwendigen sechs Scalarbedingungen (§ 139), um die lineare Vectorfunction φ zu bestimmen. Sie liefern:

$$\alpha \parallel V\varphi\beta\varphi\gamma,$$

oder

$$x\alpha = \varphi^{-1}V\beta\gamma.$$

Hieraus

$$x = xS\alpha\varphi\alpha = S.\alpha\beta\gamma,$$

und ähnliche Ausdrücke für die anderen Vectoren.

Da wir nun haben:

$$\varrho S.\alpha\beta\gamma = \alpha S.\beta\gamma\varrho + \beta S.\gamma\alpha\varrho + \gamma S.\alpha\beta\varrho,$$

so folgt:

$$\varphi\varrho S^2.\alpha\beta\varrho = V\beta\gamma S.\beta\gamma\varrho + V\gamma\alpha S.\gamma\alpha\varrho + V\alpha\beta S.\alpha\beta\varrho;$$

und der gesuchten Gleichung kann man die Form geben:

$$S^2.\alpha\beta\gamma = S^2.\alpha\beta\varrho + S^2.\beta\gamma\varrho + S^2.\gamma\alpha\varrho.$$

Man kann dies folgendermassen deuten: *Bildet man vier Tetraeder, indem man drei conjugirte Halbmesser eines Ellipsoids und einen beliebigen anderen Vector der Fläche immer zu je drei zusammenfasst, so ist das Quadrat des Volumens desjenigen Tetraeders, welches durch die drei conjugirten Halbmesser gebildet ist, gleich der Summe der Quadrate der Volumen der drei anderen.*

269 bis.)* *Den geometrischen Ort eines Punktes einer Geraden zu finden, die sich so bewegt, dass gegebene Punkte derselben stets in drei gegebenen Ebenen sich bewegen.*

Es seien die Einheits-Normalen der drei gegebenen Ebenen α, β, γ; σ sei der Einheits-Vector der Geraden in irgend einer Lage. Der Vector des gesuchten Punktes genügt dann den Gleichungen:

$$S\alpha(\varrho - a\sigma) = 0,$$
$$S\beta(\varrho - b\sigma) = 0,$$
$$S\gamma(\varrho - c\sigma) = 0.$$

Also $$\sigma S.\alpha\beta\gamma = \frac{V\beta\gamma}{a} S\alpha\varrho + \frac{V\gamma\alpha}{b} S\beta\varrho + \frac{V\alpha\beta}{c} S\gamma\varrho,$$

und da $$T\sigma = 1,$$

so ist der geometrische Ort von ϱ ein Ellipsoid (Monge).

Schreiben wir $$\varphi\varrho S.\alpha\beta\gamma = \frac{V\beta\gamma}{a} S\alpha\varrho + \ldots,$$

so folgt $$\varphi'\varrho S.\alpha\beta\gamma = \frac{\alpha}{a} S.\beta\gamma\varrho + \ldots,$$

und

$$\varphi\varphi'\varrho S^2.\alpha\beta\gamma = \frac{V\beta\gamma}{a}\left\{\frac{\alpha^2}{a} S.\beta\gamma\varrho + \frac{S\alpha\beta}{b} S.\gamma\alpha\varrho + \ldots\right\} + \ldots,$$

und $$\varphi\varphi'\alpha S.\alpha\beta\gamma = \frac{V\beta\gamma}{a}\frac{\alpha^2}{a} + \frac{V\gamma\alpha}{b}\frac{S\alpha\beta}{b} + \frac{V\alpha\beta}{c}\frac{S\alpha\gamma}{c};$$

also $$\frac{1}{S.\alpha\beta\gamma} S.\varphi\varphi'\alpha\varphi\varphi'\beta\varphi\varphi'\gamma$$

$$= \frac{1}{a^2b^2c^2S^4.\alpha\beta\gamma}\begin{vmatrix} \alpha^2 & S\alpha\beta & S\alpha\gamma \\ S\alpha\beta & \beta^2 & S\beta\gamma \\ S\alpha\gamma & S\beta\gamma & \gamma^2 \end{vmatrix} S.V\beta\gamma V\gamma\alpha V\alpha\beta = \frac{1}{a^2b^2c^2}.$$

Das Volumen des Ellipsoids ist also unabhängig von der Lage der Ebenen. (Booth.)

270.) Kann man die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung auf die Form bringen

---

* Von dem Verfasser für diese Ausgabe mitgetheilt.

$$S\varrho\varphi^{-1}\varrho = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

wo $$(\varphi - g)(\varphi - g_1)(\varphi - g_2) = 0,$$

so wissen wir, dass g, g_1, g_2 die Quadrate der Halbachsen sind.

Setzen wir $\varphi + h$ an Stelle von φ, so erhalten wir eine zweite Fläche, für welche die Differenzen der Quadrate der Halbachsen dieselben sind, wie für die erste Fläche, d. h.

$$S\varrho(\varphi + h)^{-1}\varrho = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

ist *confocal* mit (1). Aus dieser einfachen Umformung der Gleichung kann man leicht alle Eigenschaften einer Reihe confocaler Flächen ableiten. Wir wollen ein Beispiel behandeln.

271.) *Zwei confocale Flächen zweiter Ordnung, welche sich schneiden, schneiden sich unter rechtem Winkel.*

Denn die Normale zu (2) ist

$$(\varphi + h)^{-1}\varrho;$$

und die Normale einer anderen jener Flächen, welche durch denselben Punkt ϱ geht, ist

$$(\varphi + h_1)^{-1}\varrho.$$

Nun ist:

$$S.(\varphi + h)^{-1}\varrho(\varphi + h_1)^{-1}\varrho = S.\varrho\frac{1}{(\varphi + h)(\varphi + h_1)}\varrho$$

$$= \frac{1}{h - h_1} S\varrho((\varphi + h_1)^{-1}\varrho - (\varphi + h)^{-1}\varrho),$$

und dies verschwindet, wenn h und h_1 von einander verschieden sind, was der Fall sein muss, da sonst die Flächen identisch wären.

272.) *Die Bedingungen für die Aehnlichkeit zweier Centralflächen zweiter Ordnung aufzustellen.*

Bezieht man dieselben auf ihren Mittelpunkt, so sind ihre Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} S\varrho\varphi\varrho &= 1, \\ S\varrho\varphi'\varrho &= 1, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)^*$$

Wir haben die Bedingungen aufzusuchen, unter welchen die Achsen der einen den Achsen der andern proportional sind.

Sind nun

$$\left.\begin{aligned} g^3 + m_2 g^2 + m_1 g + m &= 0, \\ g'^3 + m'_2 g'^2 + m'_1 g' + m' &= 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

die Gleichungen, welche die Quadrate der Reciproken der Halbachsen bestimmen, so muss sein:

$$\frac{m'_2}{m_2} = \mu, \quad \frac{m'_1}{m_1} = \mu^2, \quad \frac{m'}{m} = \mu^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

wo μ eine unbestimmte Scalar ist. Wir sehen also, dass zwei Scalarbedingungen genügen. Eliminirt man μ, so folgt:

---

* φ' ist hier nicht die Conjugirte von φ. Anmerkung des Verfassers.

$$\frac{m'_2{}^2}{m_2} = \frac{m'_1}{m_1}; \qquad \frac{m'm'_2}{mm_2} = \frac{m'_1{}^2}{m_1{}^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

diese Gleichungen sind gleichbedeutend mit den gewöhnlichen Bedingungen.

273.) *Den grössten und den kleinsten Halbmesser der Schnittcurve eines Ellipsoids und einer durch den Mittelpunkt gehenden Ebene zu bestimmen.*

Wir haben:
$$\left.\begin{aligned} S\varrho\varphi\varrho &= 1 \\ S\alpha\varrho &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

welche zusammengenommen den elliptischen Schnitt darstellen; wir haben die weitere Bedingung, dass $T\varrho$ ein Maximum oder Minimum sein soll.

Differentiirt man die Gleichung der Ellipse, so folgt:

$$S\varphi\varrho d\varrho = 0,$$
$$S\alpha d\varrho = 0,$$

und die Bedingung des Maximums liefert:

$$dT\varrho = 0$$

oder
$$S\varrho d\varrho = 0.$$

Eliminirt man den unbestimmten Vector $d\varrho$, so folgt:

$$S.\alpha\varrho\varphi\varrho = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Dies zeigt, *dass der grösste oder kleinste Vector, die Normale in seinem Endpunkte und die Senkrechte auf der Schnittebene, in einer Ebene liegen.*

Es zeigt weiter, dass es nur zwei Vectorrichtungen gibt, welche den Bedingungen genügen, und dass dieselben aufeinander senkrecht stehen. Denn (2) wird befriedigt, wenn man $\alpha\varrho$ an Stelle von ϱ setzt.

Wir haben jetzt die drei Gleichungen (1) und (2) zu lösen, um die Vectoren der vier Punkte zu bestimmen, in welchen die Ellipse (1) den Kegel (2) schneidet.

Wir erhalten

$$\varphi\varrho = xV.\varphi^{-1}\alpha V\alpha\varrho.$$

Operiren wir mit $S.\varrho$, so folgt

$$1 = x\varrho^2 S\alpha\varphi^{-1}\alpha,$$

hieraus
$$\varrho^2\varphi\varrho = \varrho - \alpha\frac{S\varrho\varphi^{-1}\alpha}{S\alpha\varphi^{-1}\alpha}$$

oder
$$\varrho = \frac{S\varrho\varphi^{-1}\alpha}{S\alpha\varphi^{-1}\alpha}(1-\varrho^2\varphi)^{-1}\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

und hieraus:
$$S.\alpha(1-\varrho^2\varphi)^{-1}\alpha = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

eine quadratische Gleichung für ϱ^2, aus welcher die Länge des gröss-

ten und kleinsten Vector bestimmt werden können. Nach § 147 kann man schreiben:

$$m\varrho^4 S\alpha\varphi^{-1}\alpha - \varrho^2 S.\alpha(m_2 - \varphi)\alpha + \alpha^2 = 0 \quad \ldots\ldots (5)$$

[Hätten wir statt mit $S.\varrho$ mit $S.\varphi^{-1}\alpha$ oder $S.\varphi^{-1}\varrho$ operirt, so hätten wir eine dem Anschein nach von dieser verschiedene Gleichung erhalten; dieselbe lässt sich aber leicht auf diese zurückführen. Es ist eine gute Uebung für den Leser, die Identität dieser Gleichungen nachzuweisen.]

Führen wir die Werthe von ϱ^2 aus (5) in (3) ein, so erhalten wir die Vectoren der gesuchten Durchmesser.

[Der Leser kann leicht direkt nachweisen, dass:

$$(1 - \varrho_1{}^2\varphi)^{-1}\alpha \quad \text{und} \quad (1 - \varrho_2{}^2\varphi)^{-1}\alpha$$

nothwendigerweise aufeinander senkrecht stehen, wenn beide auf α senkrecht sind, und wenn $\varrho_1{}^2$ und $\varrho_2{}^2$ von einander verschieden sind. Man sehe § 271.]

274.) Aus (5) des vorigen Paragraphen sehen wir, dass:

$$\varrho_1{}^2\varrho_2{}^2 = \frac{\alpha^2}{mS\alpha\varphi^{-1}\alpha}.$$

Der Flächeninhalt der Ellipse (1) ist also:

$$\frac{\pi T\alpha}{\sqrt{-mS\alpha\varphi^{-1}\alpha}}.$$

Der geometrische Ort der Normalen aller jener Diametralschnitte eines Ellipsoids, welche denselben Flächeninhalt haben, ist der Kegel:

$$S\alpha\varphi^{-1}\alpha = C\alpha^2.$$

Hat (5) zwei gleiche Wurzeln, d. h. hat man

$$(m_2\alpha^2 - S\alpha\varphi\alpha)^2 = 4m\alpha^2 S\alpha\varphi^{-1}\alpha \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

so ist die Schnittcurve ein Kreis.

Es ist nicht schwer nachzuweisen, dass es nur zwei Werthe von $U\alpha$ gibt, welche jener Gleichung genügen. Es gibt aber eine andere Quaternionenform jener Gleichung, aus welcher man die Lösung dieser und ähnlicher Aufgaben unmittelbar ablesen kann. (Weiter unten § 275.)

275.) Nach § 168 können wir die Gleichung

$$S\varrho\varphi\varrho = 1$$

in der neuen Form schreiben

$$S.\lambda\varrho\mu\varrho + p\varrho^2 = 1,$$

wo p eine bekannte Scalar ist; λ, μ sind ausgedrückt durch die Constanten in φ, doch sind die Tensoren nicht einzeln bekannt, nur ihr Product ist gegeben. [Wir verweisen den Leser auf §§ 121. 122.]

Wir können dies schreiben:

$$2S\lambda\varrho S\mu\varrho + (p - S\lambda\mu)\varrho^2 = 1 \ldots\ldots\ldots (1)$$

Aus dieser Form sehen wir, dass jede Ebene senkrecht auf μ oder λ die Fläche in einem Kreise schneidet. Denn setzen wir:

$$S\lambda\varrho = a\,,$$

so folgt:

$$2aS\mu\varrho + (p - S\lambda\mu)\varrho^2 = 1\,,$$

die Gleichung einer Kugel, welche durch die ebene Schnittcurve geht. λ und μ in § 168 sind also die Werthe von α in Gleichung (6) des vorigen Paragraphen.

276.] *Je zwei Kreisschnitte einer Mittelpunktfläche zweiter Ordnung, deren Ebenen nicht parallel sind, liegen auf einer Kugel.*

Denn die Gleichung

$$(S\lambda\varrho - a)(S\mu\varrho - b) = 0\,,$$

wo a und b beliebige Scalarconstanten sind, stellt ein System von zwei, nicht-parallelen Ebenen dar, welche die Fläche in Kreisen schneiden. Eliminirt man das Product $S\lambda\varrho\, S\mu\varrho$ aus dieser Gleichung und aus Gleichung (1) des vorigen Paragraphen, so bleibt die Gleichung einer Kugel.

277.) *Die erzeugenden Geraden einer Mittelpunktfläche zweiter Ordnung zu finden.*

Die Gleichung der Fläche sei

$$S\varrho\varphi\varrho = 1\,.$$

Ist α der Vector eines Punktes der Fläche, und ω ein, einer erzeugenden Geraden paralleler Vector, so muss

$$\varrho = \alpha + x\omega$$

für jeden Werth von x sein.

Hieraus: $$S(\alpha + x\omega)\varphi(\alpha + x\omega) = 1\,;$$

dies liefert die beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} S\alpha\varphi\omega &= 0\,,\\ S\omega\varphi\omega &= 0\,. \end{aligned}\right\}$$

Die erste ist die Gleichung einer Ebene, welche durch den Mittelpunkt geht und parallel ist der Tangentialebene am Endpunkte von α; die zweite ist die Gleichung des Asymptotenkegels. Die erzeugenden Geraden sind also den Schnittlinien dieser Flächen parallel; ein bekannter Satz.

Aus diesen Gleichungen folgt

$$y\varphi\omega = V\alpha\omega\,,$$

wo y eine zu bestimmende Scalar ist. Operiren wir hierauf mit

$S.\beta$ und $S.\gamma$, wo β und γ beliebige nicht mit α complanare Vectoren sind. Wir erhalten:

$$S\omega(y\varphi\beta + V\alpha\beta) = 0; \qquad S\omega(y\varphi\gamma - V\gamma\alpha) = 0 \ldots . \quad (1)$$

hieraus: $$S.\varphi\alpha(y\varphi\beta + V\alpha\beta)(y\varphi\gamma - V\gamma\alpha) = 0$$

oder $$my^2 S.\alpha\beta\gamma - S\alpha\varphi\alpha\, S.\alpha\beta\gamma = 0;$$

hieraus erhalten wir die beiden Werthe

$$y = \pm\sqrt{\frac{S\alpha\varphi\alpha}{m}} = \pm\sqrt{\frac{1}{m}},$$

die Gleichungen der beiden erzeugenden Geraden.

278.) Aus Gleichung (1) haben wir:

$$z\omega = V.(y\varphi\beta + V\alpha\beta)(y\varphi\gamma - V\gamma\alpha)$$
$$= my^2\varphi^{-1}V\beta\gamma + yV.\varphi\alpha V\beta\gamma - \alpha S.\alpha V\beta\gamma;$$

und je nach dem Zeichen von y erhält man die eine oder die andere erzeugende Gerade.

$V\beta\gamma$ kann ein beliebiger Vector sein, der nur nicht auf α senkrecht stehen darf (dies ward im vorigen Paragraphen vorausgesetzt); wir können also dafür ϑ schreiben.

Führen wir den oben für y gefundenen Werth ein, so folgt:

$$z\omega = \varphi^{-1}\vartheta - \alpha S\alpha\vartheta \pm \sqrt{\frac{1}{m}}\, V\varphi\alpha\vartheta,$$
$$= V.\varphi\alpha V\alpha\varphi^{-1}\vartheta \pm \sqrt{\frac{1}{m}}\, V\varphi\alpha\vartheta;$$

dies können wir schreiben:

$$= \varphi^{-1}(V.\alpha V\varphi\alpha\vartheta) \pm \sqrt{\frac{1}{m}}\, V\varphi\alpha\vartheta \ldots\ldots\ldots . \quad (2)$$

Setzt man $$\tau = V\varphi\alpha\vartheta,$$

so folgt $$z\omega = \varphi^{-1}V\alpha\tau \pm \sqrt{\frac{1}{m}}\,\tau,$$

mit der Bedingung

$$S\tau\varphi\alpha = 0.$$

[Jedes dieser Systeme von Werthen gibt die vollständige Lösung der Aufgabe; wir haben mehrere gegeben ihrer Eigenthümlichkeiten wegen und weil viele Eigenschaften der Flächen zweiter Ordnung unmittelbar aus den verschiedenen Formen folgen. Es ist eine gute Uebung, nachzuweisen, dass

$$\psi\vartheta = U\left(V.\varphi\alpha V\alpha\varphi^{-1}\vartheta \pm \sqrt{\frac{1}{m}}\, V\varphi\alpha\vartheta\right)$$

eine Invariante ist.

Man erreicht dies am leichtesten, indem man nachweist, dass identisch $$V.\psi\vartheta\psi\vartheta_1 = 0.]$$

Schreiben wir α statt $V\beta\gamma$, so folgt:

$$z\omega = -\varphi^{-1}V.\alpha V\alpha\varphi\alpha \mp \sqrt{\frac{1}{m}}\, V\alpha\varphi\alpha.$$

[Wir brauchen kaum zu bemerken, dass wir es zu thun haben mit der *allgemeinen* Gleichung der Mittelpunktflächen zweiter Ordnung, bezogen auf den Mittelpunkt als Anfangspunkt.]

Uebungsbeispiele zu Kapitel VIII.

1. Den geometrischen Ort der Punkte auf der Fläche

$$S\varrho\varphi\varrho = 1$$

zu bestimmen, wo die erzeugenden Geraden senkrecht aufeinander stehen.

2. Die Gleichung der Fläche aufzustellen, welche eine Gerade erzeugt, die sich um eine feste Achse dreht, mit der sie fest verbunden ist, dieselbe aber nicht schneidet.

3. Die Bedingungen aufzustellen, unter welchen

$$S\varrho\varphi\varrho = 1$$

eine Rotationsfläche ist, deren Achse eine gegebene Richtung hat.

4. Die Gleichung des geraden Cylinders aufzustellen, der ein gegebenes Ellipsoid berührt.

5. Durch den Mittelpunkt eines Ellipsoids sei eine beliebige Ebene gelegt. Im Mittelpunkte errichtet man eine Senkrechte auf einer Ebene und trägt auf derselben die Längen der Halbachsen des elliptischen Schnittes auf. Man bestimme den geometrischen Ort der so gewonnenen Punkte für alle Lagen der Schnittebene. [Fresnel's Wellenfläche. Man sehe Kapitel XI.]

6. Der Kegel, welcher centrale, ebene Schnitte eines Ellipsoids, die gleichen Inhalt haben, berührt, ist der Asymptotenkegel eines confocalen Hyperboloids.

7. Man suche die Umhüllende aller nicht centralen ebenen Schnitte eines Ellipsoids, deren Inhalt constant ist.

8. Den geometrischen Ort der Schnittpunkte dreier aufeinander senkrecht stehender Ebenen zu bestimmen, von denen jede eine von drei confocalen Flächen zweiter Ordnung berührt.

9. Den geometrischen Ort des Fusspunktes des Perpendikels zu bestimmen, das vom Mittelpunkte eines Ellipsoids auf die Ebene gefällt ist, die durch die Endpunkte dreier conjugirten Halbmesser geht.

10. Die Punkte des Ellipsoids zu bestimmen, in welchem der Winkel zwischen der Normale und dem Radiusvector am grössten ist.

11. Schneiden sich vier ähnliche und ähnlich gelegene Flächen zweiter Ordnung, so geht die Schnittebene eines jeden Paares durch einen gemeinsamen Punkt.

12. Wird ein Parallelepipedon in eine Mittelpunktfläche zweiter Ordnung eingeschrieben, so sind dessen Kanten einem Systeme conjugirter Durchmesser parallel.

13. Nachzuweisen, dass es eine unendliche Anzahl von Achsensystemen gibt, für welche die Cartesische Gleichung eines Ellipsoids wird:

$$x^2 + y^2 + z^2 = e^2.$$

14. Die Gleichung der Fläche zweiter Ordnung aufzustellen, welche ein gegebenes Tetraeder umschreibt, so dass die Tangentialebene in jedem Eckpunkte der entgegengesetzten Fläche parallel sei; weiter zeige man, dass der Mittelpunkt der Fläche mit dem mittlern Punkte des Tetraeders zusammenfällt.

15. Zwei ähnliche und ähnlich gelegene Flächen zweiter Ordnung schneiden sich in einer ebenen Curve, deren Ebene conjugirt ist dem Vector, welche ihre Mittelpunkte verbindet.

16. Den geometrischen Ort der Punkte auf

$$S\varrho\varphi\varrho = 1$$

zu bestimmen, deren Normalen die Normale eines gegebenen Punktes schneiden.

Man bestimme den geometrischen Ort der Punkte auf jener Fläche, deren Normalen eine im Raume gegebene Gerade schneiden.

17. Die Normalen, welche in Punkten einer erzeugenden Geraden gezogen sind, sind einer festen Ebene parallel.

18. Die Umhüllende der Contactebenen der Tangentialebenen zu bestimmen, welche von Punkten einer concentrischen Kugel aus an ein Ellipsoid gelegt sind. Den geometrischen Ort der Punkte zu bestimmen, von welchen aus jene Tangentialebenen gelegt sein müssen, damit die Umhüllende eine Kugel sei.

19. Die Summe der Reciproken der Quadrate der Perpendikel von dem Mittelpunkte auf drei conjugirte Tangentialebenen ist constant.

20. Von zwei beliebigen Punkten eines Ellipsoids aus werden Tangentenkegel an ein ähnliches, ähnlich gelegenes, concentrisches Ellipsoid gelegt. Man zeige, dass dieselben sich in zwei ebenen Curven schneiden.

Man bestimme den geometrischen Ort der Spitzen jener Kegel, wenn jene ebenen Schnitte senkrecht aufeinander stehen.

21. Den geometrischen Ort der Berührungspunkte der Tangentialebenen zu finden, welche gleichweit vom Mittelpunkte einer Fläche zweiter Ordnung entfernt sind.

22. Von einem festen Punkte A auf der Oberfläche einer gegebenen Kugel ziehe man irgend eine Sehne AD; es sei D' der zweite Schnittpunkt der Kugel mit der Secante BD, welche von einem beliebigen Punkte B ausgeht; man nehme einen Radiusvector, AE, dessen Länge gleich BD', und dessen Richtung mit der Richtung der Sehne AD zusammenfällt oder derselben entgegengesetzt ist. Der geometrische Ort von E ist ein Ellipsoid, dessen Mittelpunkt A ist und welcher durch B geht. (Hamilton, Elements p. 227.)

23. Man zeige, dass die Gleichung

$$l^2(e^2-1)(e+S\alpha\alpha') = (S\alpha\varrho)^2 - 2eS\alpha\varrho S\alpha'\varrho + (S\alpha'\varrho)^2 + (1-e^2)\varrho^2,$$

wo e ein veränderlicher Scalarparameter ist, und α, α' Einheits-Vectoren, ein System confocaler Flächen darstellt. (Ibid. p. 664.)

24. Nachzuweisen, dass der geometrische Ort der Durchmesser von

$$S\varrho\varphi\varrho = 1,$$

welche den Sehnen parallel sind, die durch die Tangentialebenen an den Kegel

$$S\varrho\psi\varrho = 0$$

halbirt werden, der Kegel ist:

$$S.\varrho\varphi\psi^{-1}\varphi\varrho = 0.$$

25. Die Gleichung eines Kegels aufzustellen, dessen Spitze eine Ecke eines gegebenen Tetraeders ist, und welcher durch den Kreis geht, der den übrigen Ecken umschrieben ist.

26. Nachzuweisen, dass der geometrische Ort der Punkte auf der Fläche

$$S\varrho\varphi\varrho = 1,$$

deren Normalen die Normale in dem Punkte $\varrho = \omega$ schneiden, auf dem Kegel

$$S.(\varrho-\omega)\varphi\omega\varphi\varrho = 0$$

liegt.

27. Den geometrischen Ort des Punktes aufzusuchen, für welchen das Quadrat der Entfernung von einer gegebenen Geraden proportional ist der Entfernung von einer gegebenen Ebene.

28. Nachzuweisen, dass der geometrische Ort des Pols der Ebene

$$S\alpha\varrho = 1$$

in Bezug auf die Fläche

$$S\varrho\varphi\varrho = 1$$

eine Kugel ist, wenn α der Bedingung

$$S\alpha\varphi^{-2}\alpha = C$$

genügt.

29. Nachzuweisen, dass die Gleichung der Fläche, welche erzeugt wird durch Gerade, die durch den Mittelpunkt gehen, parallel den Normalen von

$$S\varrho\varphi^{-1}\varrho = 1,$$

in der Schnittcurve mit

$$S\varrho(\varphi - h)^{-1}\varrho = 1$$

ist

$$\omega^2 - hS\omega(\varphi + h)^{-1}\omega = 0.$$

30. Man legt gemeinsame Tangentialebenen an

$$2S\lambda\varrho S\mu\varrho + (p - S\lambda\mu)\varrho^2 = 1 \quad \text{und} \quad T\varrho = h;$$

den Werth von h zu bestimmen, damit die Berührungslinien auf der ersten Fläche ebene Curven seien. Was sind jene Curven in diesem Falle auf der Kugel?

Man untersuche den Fall von

$$p^2 - S^2\lambda\mu = 0.$$

31. Legt man Tangentenkegel an

$$S\varrho\varphi^2\varrho = 1$$

von jedem Punkte von

$$S\varrho\varphi\varrho = 1,$$

so ist die Umhüllende ihrer Contactebenen:

$$S\varrho\varphi^3\varrho = 1.$$

32. Tangentenkegel werden gelegt von jedem Punkte von

$$S(\varrho - \alpha)\varphi(\varrho - \alpha) = n^2$$

an die ähnliche und ähnlich gelegene Fläche

$$S\varrho\varphi\varrho = 1;$$

man zeige, dass ihre Contactebenen die Fläche

$$(S\alpha\varphi\varrho - 1)^2 = n^2 S\varrho\varphi\varrho$$

umhüllen.

33. Die Umhüllende der Ebenen zu bestimmen, welche die Parabeln

$$\varrho = \alpha t^2 + \beta t, \qquad \varrho = \alpha t_1^2 + \gamma t_1$$

berühren, wo α, β, γ ein rechtwinkliges System bilden und t und τ Scalaren sind.

34. Von einem festen Punkte aus legt man Tangentenkegel an eine Reihe von ähnlichen und ähnlich gelegenen concentrischen Ellipsoiden.

Man suche die Gleichung der Fläche, auf welcher die Berührungscurven liegen.

35. Man untersuche die Flächen, deren Gleichungen sind

$$S\alpha\varrho S\beta\varrho = S\gamma\varrho,$$

und

$$S^2\alpha\varrho + S.\alpha\beta\varrho = 1.$$

36. Nachzuweisen, dass der geometrische Ort der Spitzen der geraden Kegel, welche ein Ellipsoid berühren, ein Hyperboloid ist.

37. Es seien α_1, α_2, α_3 conjugirte Vectordurchmesser von

$$S\varrho\varphi\varrho = 1,$$

wo
$$\varphi^3 - m_2\varphi^2 + m_1\varphi - m = 0;$$

nachzuweisen, dass

$$\Sigma(\alpha^2) = \frac{m_1}{m}, \qquad \Sigma(V\alpha_1\alpha_2)^2 = -\frac{m_2}{m},$$

$$S^2.\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\frac{1}{m} \quad \text{und} \quad \Sigma(\varphi\alpha)^2 = m_2.$$

Kapitel IX.

Krumme Linien und Flächen.

279.) Wir sahen (§ 31 (l)), dass die Gleichungen

$$\varrho = \varphi t = \Sigma . \alpha f(t)$$

und

$$\varrho = \varphi(t, u) = \Sigma . \alpha f(t, u),$$

wo α einer aus einer Reihe von gegebenen Vectoren, und f eine Scalarfunction der Scalaren t und u ist, eine Curve und eine Fläche darstellen. Wir beginnen dieses leider allzukurze Kapitel, indem wir einige Folgerungen ableiten, die sich unmittelbar aus der Form dieser Ausdrücke ergeben. Wir werden dann eine Reihe von Beispielen behandeln, ohne Rücksicht auf systematische Entwickelung oder Anordnung.

280.) Was u und t in diesen Gleichungen bedeuten, ist natürlich unwesentlich. Bei der geometrischen Untersuchung der Curven ist es zweckmässig, t als die Länge s der Curve zu nehmen, gemessen von einem festen Punkte aus. In den kinematischen Untersuchungen des nächsten Kapitels ist es sehr bequem, unter t die *Zeit* zu verstehen.

281.) Wir können also die Gleichung einer jeden Curve im Raume schreiben:

$$\varrho = \varphi s,$$

wo φ eine Vectorfunction ist der Länge s der Curve. Es ist eine *lineare* Function, wenn die Gleichung (wie in § 31 (l)) eine Gerade darstellt.

282.) Wir sahen auch, dass

$$\frac{d\varrho}{ds} = \frac{d}{ds}\varphi s = \varphi' s$$

ein *Einheits*-Vector ist in Richtung der Tangente im Endpunkte von ϱ. In dem folgenden Punkte, den wir mit $s + \delta s$ bezeichnen, wird dieser Einheits-Tangentenvector

$$\varphi' s + \varphi'' s\, \delta s + \ldots .$$

Da aber

$$T\varphi' s = 1,$$

so folgt $$S.\varphi' s\, \varphi'' s = 0.$$

$\varphi'' s$ ist also ein Vector in der Osculationsebene der Curve und steht senkrecht auf der Tangente.

Es sei $\delta\vartheta$ der Winkel zwischen den aufeinander folgenden Tangenten $\varphi' s$ und $\varphi' s + \varphi'' s \delta s + \ldots$. Wir haben dann:

$$L\frac{\delta\vartheta}{\delta s} = T\varphi'' s;$$

der Tensor von $\varphi'' s$ ist also der reciproke Krümmungshalbmesser der Curve im Punkte s.

283.) Ist nun $\overline{OP} = \varphi s$ der Vector eines beliebigen Punktes P auf der Curve, und ist C der Krümmungsmittelpunkt von P, so ist

$$\overline{PC} = -\frac{1}{\varphi'' s};$$

und

$$\overline{OC} = \varphi s - \frac{1}{\varphi'' s}$$

ist die Gleichung des geometrischen Ortes der Krümmungsmittelpunkte. Weiter folgt, dass

$$V.\varphi' s\, \varphi'' s \quad \text{oder} \quad \varphi' s\, \varphi'' s$$

ein auf der Osculationsebene senkrecht stehender Vector ist.

$$T\frac{d}{ds}(\varphi' s\, U\varphi'' s)$$

das Maass der *Windung* der gegebenen Curve oder die Grösse der Drehung ihrer Osculationsebene für die Längeneinheit.

284.) Als Beispiel für die Anwendung dieser Ausdrücke wollen wir die Curve aufsuchen, deren Krümmung und Windung beide constant sind.

Wir haben: Krümmung $= T\varphi'' s = T\varrho'' = c$, hieraus

$$\varphi' s\, \varphi'' s = \varrho'\varrho'' = c\alpha,$$

wo α ein auf der Osculationsebene senkrecht stehender Vector ist. Dies liefert

$$\varrho'\varrho''' + \varrho''^2 = cL\frac{\delta\alpha}{\delta s} = cc_1 U\varrho'' = c_1\varrho'',$$

wenn c_1 die Grösse der Windung bezeichnet.

Durch Integration erhalten wir:

$$\varrho'\varrho'' = c_1\varrho' + \beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

wo β einen constanten Vector bedeutet. Erhebt man beide Seiten dieser Gleichung ins Quadrat, so folgt:

$$c^2 = c_1^2 - \beta^2 - 2c_1 S\beta\varrho'$$
$$= -c_1^2 - \beta^2,$$

(denn operiren wir auf (1) mit $S.\varrho'$, so folgt $+c_1 = S\beta\varrho'$),

oder

$$T\beta = \sqrt{c^2 + c_1^2}.$$

Multiplicirt man (1) durch ϱ' und bedenkt, dass

$$T\varrho' = 1,$$

so folgt: $$-\varrho'' = -c_1 + \varrho'\beta,$$

oder durch Integration: $\varrho' = c_1 s - \varrho\beta + a$ . . . . . (2)

wo a eine constante Quaternion ist. Eliminirt man ϱ', so folgt

$$-\varrho'' = -c_1 + c_1 s\beta - \varrho\beta^2 + a\beta;$$

der Vectortheil hiervon ist:

$$\varrho'' - \varrho\beta^2 = -c_1 s\beta - Va\beta.$$

Das vollständige Integral dieser Gleichung ist

$$\varrho = \xi \cos. sT\beta + \eta \sin. sT\beta - \frac{1}{T\beta^2}(c_1 s\beta + Va\beta) \quad . . . (3)$$

wo ξ und η zwei beliebige constante Vectoren sein sollen.

Aus (2) folgt weiter

$$S\beta\varrho = c_1 s + Sa$$

und dies verlangt, dass

$$S\beta\xi = 0, \qquad S\beta\eta = 0.$$

Weiter muss $$T\varrho' = 1$$

sein und dies liefert

$$-1 = T\beta^2(\xi^2 \sin.^2 sT\beta + \eta^2 \cos.^2 sT\beta - 2S\xi\eta \sin. sT\beta \cos. sT\beta) - \frac{c}{c^2 + {c_1}^2}.$$

Dies verlangt nun:

$$S\xi\eta = 0, \qquad T\xi = T\eta = \frac{c}{c^2 + {c_1}^2}.$$

(3) wird also die allgemeine Gleichung einer Schraubenlinie, die auf einem geraden Cylinder gezogen ist. (Vergleiche § 31 (*m*).)

285.) Das Vectorperpendikel vom Anfangspunkte auf die Tangente der Curve $\varrho = \varphi(s)$ ist:

$$\frac{1}{\varrho'} V\varrho'\varrho \quad \text{oder} \quad \varrho' V\varrho\varrho'$$

(da ϱ' ein Einheits-Vector).

Eine gemeinsame Eigenschaft jener Curven aufzufinden, deren Tangenten gleichweit vom Anfangspunkte entfernt sind.

Hier ist $$TV\varrho\varrho' = c;$$

dies kann man schreiben

$$-\varrho^2 - S^2\varrho\varrho' = c^2 \quad . . . . . (1)$$

Diese Gleichung zeigt, dass (wie man auch auf andere Weise sieht) jede Curve, die auf einer Kugel liegt, deren Mittelpunkt der Anfangspunkt ist, der gestellten Bedingung genügt. Denn

$$-\varrho^2 = c^2 \quad \text{liefert} \quad S\varrho\varrho' = 0,$$

und hierdurch wird (1) befriedigt.

Wenn $S\varrho\varrho'$ nicht verschwindet, so ist das Integral von (1)

$$\sqrt{T\varrho^2 - c^2} = s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Eine willkürliche Constante ist nicht nöthig, da wir s von einem beliebigen Punkte der Curve aus messen können. Die Gleichung einer Evolvente, die in diesem Punkte anfängt, ist:

$$\omega = \varrho - s\varrho',$$

dies liefert:

$$\begin{aligned} T\omega^2 &= T\varrho^2 + s^2 + 2sS\varrho\varrho' \\ &= T\varrho^2 + s^2 - 2s\sqrt{T\varrho^2 - c^2} \quad \text{nach (1)} \\ &= c^2, \quad \text{aus (2)}, \end{aligned}$$

und umfasst alle Curven, deren Evolventen auf einer um den Anfangspunkt beschriebenen Kugel liegen.

286.) *Den geometrischen Ort des Fusspunktes des Perpendikels zu bestimmen, das von einem Punkte der Achse auf die Tangenten einer Schraubenlinie gezogen ist.*

Die Gleichung der Schraubenlinie ist

$$\varrho = \alpha \cos\frac{s}{a} + \beta \sin\frac{s}{a} + \gamma s,$$

wo die Vectoren α, β, γ aufeinander senkrecht stehen, und

$$T\alpha = T\beta = b, \quad \text{während} \quad aT\gamma = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Aus den vorhergehenden Paragraphen erhält man die Gleichung des gesuchten Ortes:

$$\omega = \varrho' V\varrho\varrho'$$

$$= \alpha\left(\cos\frac{s}{a} + \frac{a^2-b^2}{a^3} s \sin\frac{s}{a}\right) + \beta\left(\sin\frac{s}{a} - \frac{a^2-b^2}{a^3} s\cos\frac{s}{a}\right) + \gamma\frac{b^2}{a^2}s,$$

diese Curve liegt auf dem Hyperboloid, dessen Gleichung ist

$$S^2\alpha\omega + S^2\beta\omega - a^2S^2\gamma\omega = b^4,$$

wie der Leser selbst nachweisen kann.

287.) *Die kürzeste Entfernung zweier aufeinander folgenden Tangenten einer gewundenen Curve zu bestimmen.*

Es sei die eine Tangente

$$\omega = \varrho + x\varrho';$$

die folgende Tangente, deren Entfernung auf der Curve δs beträgt, ist:

$$\omega = \varrho + \varrho'\delta s + \varrho''\frac{\delta s^2}{1.2} + \ldots + y\left(\varrho' + \varrho''\delta s + \varrho'''\frac{\delta s}{1.2} + \ldots\right);$$

die Grösse der kürzesten Entfernung zwischen diesen Geraden beträgt nach §§ 203, 210:

$$S.\left(\varrho'\delta s+\varrho''\frac{\delta s^2}{1.2}+\varrho'''\frac{ds^3}{1.2.3}+\ldots\right)UV.\varrho'\left(\varrho'+\varrho''\delta s+\varrho'''\frac{\delta s^2}{1.2}+\ldots\right)$$

$$=\frac{\frac{\delta s^4}{12}S.\varrho'\varrho''\varrho'''}{TV\varrho'\varrho''\delta s}$$

wenn wir die Glieder höherer Ordnung vernachlässigen.

Da $\varrho'\varrho''$ ein Vector ist $T\varrho'=1$, so können wir schreiben:

$$\frac{\delta s^3}{12}S.U\varrho''V\varrho'\varrho'''.$$

Aber nach § 133 (2):

$$\frac{\delta UV\varrho'\varrho''}{UV\varrho'\varrho''}=V\frac{V\varrho'\varrho'''}{V\varrho'\varrho''}\delta s=\frac{\delta s}{\varrho''^2}\varrho'S.\varrho'\varrho''\varrho'''.$$

Hieraus folgt, dass

$$\frac{\delta s}{T\varrho''}S.U\varrho''V\varrho'\varrho'''$$

der Winkel $\delta\varphi$ ist, den zwei aufeinander folgende Lagen der Osculationsebene einschliessen. [Man sehe § 283.]

Die kürzeste Entfernung zweier aufeinander folgenden Tangenten wird also ausgedrückt durch

$$\frac{\delta\varphi\,\delta s^2}{12r},$$

wo $r=\frac{1}{T\varrho''}$ der Radius der ersten Krümmung der gewundenen Curve ist.

288.) Betrachten wir die Gleichung der Parabel (§ 31 (*f*))

$$\varrho=\alpha t+\frac{\beta t^2}{2}.$$

Hier ist $$\varrho'=(\alpha+\beta t)\frac{dt}{ds};$$

nehmen wir $$S\beta\alpha=0,$$

so folgt $$\frac{ds}{dt}=\sqrt{-\alpha^2-\beta^2t^2},$$

und hieraus kann die Länge des Curvenbogens in t ausgedrückt werden durch eine Integration.

Weiter:

$$\varrho''=(\alpha+\beta t)\frac{d^2t}{ds^2}+\beta\left(\frac{dt}{ds}\right)^2,$$

aber $$\frac{d^2t}{ds^2}=\frac{d}{ds}\cdot\frac{1}{T(\alpha+\beta t)}=+\frac{dt}{ds}\frac{S.\beta(\alpha+\beta t)}{T(\alpha+\beta t)^3},$$

hieraus $$\varrho''=-\frac{(\alpha+\beta t)\,V\alpha\beta}{T(\alpha+\beta t)^4};$$

wir erhalten also für den Vector des Krümmungsmittelpunktes (§ 283):

$$\omega = \alpha t + \frac{\beta t^2}{2} - (\alpha^2 + \beta^2 t^2)^2 (-\beta\alpha^2 + \alpha\beta^2 t)^{-1}$$
$$= \beta\left(\frac{3t^2}{2} + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) - \alpha\frac{t^3\beta^2}{\alpha^2};$$

und dies ist die Quaternionengleichung der Evolute.

289.) Eine der einfachsten Formen der Gleichung einer gewundenen Curve ist:

$$\varrho = \alpha t + \frac{\beta t^2}{2} + \frac{\gamma t^3}{6},$$

wo α, β, γ drei beliebige nichtcomplanare Vectoren sein sollen; die numerischen Factoren sind der Bequemlichkeit halber eingeführt.

Diese Curve liegt auf einem parabolischen Cylinder, dessen Erzeugende γ parallel sind; sie liegt auch auf Cylindern, deren Leitlinien eine cubische und eine halbcubische Parabel sind, und deren Erzeugende α und β parallel sind.

Aus der Gleichung der Curve folgt:

$$\varrho' = \left(\alpha - \beta t + \gamma\frac{t^2}{2}\right)\frac{dt}{ds},$$

da $T\varrho' = 1$, kann man hieraus die Länge der Curve in t ausdrücken.

Weiter hat man:

$$\varrho'' = \left(\alpha + \beta t + \frac{\gamma t^2}{2}\right)\frac{d^2t}{ds^2} + (\beta + \gamma t)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2,$$

hier kann ϱ'' durch s ausgedrückt werden. Die Untersuchung verschiedener Eigenschaften dieser Curve ist nicht schwer und wird dem Leser von grossem Nutzen sein.

[Bemerkung. Man hat darauf zu achten, dass in dieser Gleichung t nicht die Länge s der Curve bedeuten kann. Es ist eine gute Uebung für den Leser nachzuweisen, dass eine Gleichung wie

$$\varrho = \alpha s + \beta s^2 + \gamma s^3$$

oder selbst die einfachere Form

$$\varrho = \alpha s + \beta s^2$$

keinen Sinn hat.]

290.) Die Gleichung $\varrho = \varphi^t \varepsilon,$

wo φ eine gegebene, selbstconjugirte, lineare Vectorfunction ist, t eine Scalarvariabele, und ε eine willkürliche Vectorconstante, gehört einer merkwürdigen Klasse von Curven an.

Wir erhalten unmittelbar

$$\frac{d\varrho}{dt} = \varphi^t \log\varphi\,\varepsilon,$$

wo $\log\varphi$ eine andere selbstconjugirte lineare Vectorfunction ist, die wir mit χ bezeichnen wollen.

Diese Functionen sind commutativ, da sie dasselbe Hauptsystem rechtwinkliger Vectoren haben. Wir können also schreiben:

$$\frac{d\varrho}{dt} = \chi\varrho,$$

und dies liefert $$\frac{d^2\varrho}{dt^2} = \chi^2\varrho \quad \text{u. s. w.},$$

da χ nicht t einschliesst.

Um die Richtigkeit hiervon nachzuweisen, müssen wir zeigen, dass:

$$\varphi^{t+\delta t}\varepsilon = \varrho + \frac{d\varrho}{dt}\delta t + \frac{d^2\varrho}{dt^2}\frac{\delta t^2}{1\,.\,2} + \quad \text{u. s. w.}$$

$$= \left(1 + \delta t\chi + \frac{\delta t^2}{1\,.\,2}\chi^2 + \ldots\right)\varrho$$

$$= e^{\delta t\chi}\varrho,$$

wo e die Basis der Neper'schen Logarithmen ist.

Es ist dies der Fall, wenn

$$\varphi^{\delta t} = e^{\delta t\chi}$$

oder $$\varphi = e^{\chi}$$

oder $$\log\varphi = \chi,$$

unsere Annahme (siehe § 320 unten).

[Dies Verfahren ist auf den ersten Blick überraschend; der Leser kann sich aber von dessen Richtigkeit überzeugen, indem er in Uebereinstimmung mit den Resultaten des Kapitels V schreibt:

$$\varphi\varepsilon = -g_1\alpha S\alpha\varepsilon - g_2\beta S\beta\varepsilon - g_3\gamma S\gamma\varepsilon,$$

hieraus $$\varphi^t\varepsilon = -g_1^t\alpha S\alpha\varepsilon - g_2^t\beta S\beta\varepsilon - g_3^t\gamma S\gamma\varepsilon.$$

Man erhält hieraus:

$$\chi\varepsilon = -\log g_1\,\alpha S\alpha\varepsilon - \log g_2\,\beta S\beta\varepsilon - \log g_3\,\gamma S\gamma\varepsilon,$$

und die obigen Resultate folgen hieraus.

291.) Dass die Gleichung

$$\varrho = \varphi(t, u) = \Sigma\alpha f(t, u)$$

eine Fläche darstellt, sieht man daraus, dass sie die Gleichung einer bestimmten Curve wird, wenn *entweder* t oder u einen bestimmten Werth annimmt.

Die Gleichung liefert uns also sofort zwei Systeme von Curven, welche ganz auf der Fläche liegen; diese Systeme sind derart, dass man im allgemeinen durch jeden Punkt der Fläche eine Curve eines jeden der beiden Systeme legen kann.

Tangenten, die man im Schnittpunkte jener Curven an dieselben legt, liegen in der Tangentialebene, deren Gleichung wir jetzt aufstellen wollen.

292.) Aus der gegebenen Gleichung folgt:

$$d\varrho = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)dt + \left(\frac{d\varphi}{du}\right)du;$$

die Klammern sollen andeuten, dass man die partiellen Differentialquotienten zu bilden hat.

Schreiben wir dies

$$d\varrho = \varphi_t' dt + \varphi_u' du,$$

so ist die Normale der Tangentialebene

$$V\varphi_t'\varphi_u'$$

und die Gleichung jener Ebene:

$$S.(\omega - \varphi)\varphi_t'\varphi_u' = 0.$$

293.) Wir wählen folgendes einfache Beispiel: Eine Gerade bewegt sich so, dass sie immer auf einer festen Geraden senkrecht bleibt; sie dreht sich dabei um einen Winkel, der proportional ist der Strecke, um welcher sie fortgeschritten ist; die Gleichung der so entstandenen Fläche ist:

$$\varrho = \alpha t + u(\beta \cos t + \gamma \sin t) \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

wo α, β, γ aufeinander senkrecht stehende Vectoren sind, und

$$T\beta = T\gamma.$$

Diese Fläche schneidet den geraden Cylinder

$$\varrho = a(\beta \cos t + \gamma \sin t) + v\alpha$$

in einer Schraubenlinie (§§ 31 (*m*), 284), deren Gleichung ist:

$$\varrho = \alpha t + a(\beta \cos t + \gamma \sin t).$$

Diese Gleichungen erläutern die Bemerkung, die wir in den §§ 31 (*l*), 291 machten, nämlich dass eine Vectorgleichung eine Curve oder Fläche darstellt, je nachdem sie eine oder zwei Scalarvariabeln enthält.

Aus (1) folgt:

$$d\varrho = [\alpha - u(\beta \sin t - \gamma \cos t)]dt + (\beta \cos t + \gamma \sin t)du.$$

Die Normale im Endpunkte von ϱ ist also

$$T\alpha(\gamma \cos t - \beta \sin t) - uT\beta^2 U\alpha.$$

Schreiten wir also auf einer Erzeugenden der Fläche fort, für welche t constant ist, so sehen wir, dass die Normale ihre Richtung ändert. Dies zeigt eben, dass die Fläche nicht abwickelbar ist.

294.) Das Kriterium einer abwickelbaren Fläche ist also folgendes. Wird die Fläche ausgedrückt durch eine Gleichung von der Form

$$\varrho = \varphi t + u\psi t,$$

wo φt und ψt Vectorfunctionen sind, so muss die *Richtung* der Normalen

$$V\{\varphi' t + u\psi' t\}\psi t$$

unabhängig sein von u.

Es muss also entweder sein

$$V\psi t\psi' t = 0,$$

dies würde die Fläche zu einer Cylinderfläche machen, indem alle Erzeugende parallel sind; oder

$$V\varphi' t\psi t = 0;$$

dies ist das gesuchte Kriterium. Wir können also für eine abwickelbare Fläche im allgemeinen schreiben:

$$\varrho = \varphi t + u\varphi' t \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Offenbar ist im allgemeinen $\varrho = \varphi t$ eine Curve doppelter Krümmung und $\varphi' t$ ist ein Tangentenvector.

Eine abwickelbare Fläche ist also der geometrische Ort aller Tangenten einer gewundenen Curve.

Die Tangentialebene der Fläche ist die Osculationsebene in dem entsprechenden Curvenpunkte; man sieht dies daraus, dass die Normale zu (1) parallel ist mit

$$V\varphi' t\varphi'' t \quad \text{(man sehe § 283).}$$

Die Gestalt der Linie zu bestimmen, welche entsteht durch einen Schnitt der Fläche mit einer Normalebene der Curve.

Die Gleichung der Fläche ist

$$\omega = \varrho + s\varrho' + \frac{s^2}{1.2}\varrho'' + \ldots + x(\varrho' + s\varrho'' + \ldots);$$

derjenige Theil von $\omega - \varrho$, der ϱ' parallel ist, ist

$$-\varrho' S(\omega - \varrho)\varrho' = \varrho'\left(-(s+x) - \varrho''^2\left(\frac{s^3}{6} + \frac{xs^2}{2}\right) + \ldots\right);$$

hieraus

$$\omega - \varrho = A\varrho' + \left(\frac{s^2}{2} + xs\right)\varrho'' - \left(\frac{s^3}{6} + \frac{xs^2}{2}\right)\varrho' V\varrho'\varrho''' + \ldots$$

und wenn $$A = 0,$$

das heisst ein Normalschnitt, so haben wir annähernd

$$x = -s,$$

so dass $$\omega - \varrho = -\frac{s^2}{2}\varrho'' - \frac{s^3}{3}\varrho' V\varrho'\varrho'''.$$

Die Curve hat also eine Gleichung von der Form

$$\sigma = s^2\alpha + s^3\beta,$$

eine semi-cubische Parabel.

295.) Eine geodätische Linie ist eine auf einer Fläche gezogene Curve, der Art, dass die Osculationsebene in jedem Punkte derselben stets die Normale der Fläche enthält.

Ist ν die Normale im Endpunkte von ϱ, ϱ' und ϱ'' das erste und zweite Differential des Vectors der geodätischen Linie, so muss

$$S.\nu\varrho'\varrho'' = 0$$

sein; dies kann man umformen in

$$V.\nu d U\varrho' = 0.$$

296.) Für die Kugel hat man

$$T\varrho = \alpha$$

und

$$\nu \parallel \varrho.$$

Also

$$S.\varrho\varrho'\varrho'' = 0;$$

dies zeigt, dass ϱ in einer Ebene liegen muss, welche durch den Anfangspunkt, den Mittelpunkt der Kugel, geht.

Um dies ausdrücklich zu beweisen, können wir folgenden Weg einschlagen.

Obige Gleichung ist gleichbedeutend mit den drei Gleichungen:

$$S\vartheta\varrho = 0, \qquad S\vartheta\varrho' = 0, \qquad S\vartheta\varrho'' = 0,$$

in denen, wie wir sehen, ϑ einen constanten Vector bedeutet; die erste Gleichung, welche die andern einschliesst, ist das vollständige Integral.

Wir können auch, wie folgt, verfahren:

$$0 = -\varrho S.\varrho\varrho'\varrho'' + \varrho'' S.\varrho^2\varrho' = V.V\varrho\varrho' V\varrho\varrho'' = V.V\varrho\varrho' d V\varrho\varrho',$$

und nach § 133 (2) folgt hieraus:

$$UV\varrho\varrho' = \text{const.} = \vartheta$$

und dies liefert dasselbe Resultat wie oben.

297.) In jedem Kegel haben wir

$$S\nu\varrho = 0,$$

da ϱ in der Tangentialebene liegt. Wir haben aber auch

$$S\nu\varrho' = 0.$$

Eliminiren wir ν, so liefert die allgemeine Gleichung § 295

$$0 = S.\varrho\varrho' V\varrho'\varrho'' = S\varrho d U\varrho' \quad \text{nach § 133 (2).}$$

Integrirt man, so kommt

$$C = S\varrho U\varrho' - \int S d\varrho U\varrho' = S\varrho U\varrho' + \int T d\varrho.$$

Das heisst: die Länge eines beliebigen Bogens der geodätischen Linie ist gleich der Projection des Strahls des Kegels, welcher nach dem Endpunkte jenes Bogens gezogen ist, auf die Tangente der geodätischen Linie. In andern Worten: *wird die Kegelfläche auf eine Ebene ausgebreitet, so wird die geodätische Linie eine Gerade.* Ein ähnliches Resultat lässt sich leicht ableiten für die geodätischen Linien auf einer beliebigen abwickelbaren Fläche.

298.) *Die kürzeste Linie zu finden, welche zwei Punkte auf einer gegebenen Fläche verbindet.*

Hier muss $\int T d\varrho$ ein Minimum sein mit der Bedingung, dass $d\varrho$ auf der gegebenen Fläche liege.

Nun ist: $\delta \int T d\varrho = \int \delta T d\varrho = -\int \frac{S d\varrho d\delta\varrho}{T d\varrho} = -\int S.U d\varrho d\delta\varrho$

$$= -[S.U d\varrho \delta\varrho] + \int S.\delta\varrho\, dU d\varrho .$$

Das Glied zwischen den Klammern verschwindet, da die Endpunkte fest sind, also $\delta\varrho = 0$.

Die einzigen Bedingungen sind also:

$$\int S.\delta\varrho\, dU d\varrho = 0 \quad \text{und} \quad S\nu\delta\varrho = 0,$$

dies liefert $V.\nu\, dU d\varrho = 0$ wie in § 295.

Sind die Endpunkte der Curve nicht gegeben, sollen dieselben aber auf gegebenen Curven liegen, so müssen wir das Glied in Klammern, welches im vorigen Fall verschwand, berücksichtigen. Die Form desselben

$$S.U d\varrho\, \delta\varrho$$

zeigt, dass die kürzeste Linie eine jede der gegebenen Linien unter einem rechten Winkel schneidet.

299.) Die Osculationsebene der Curve

$$\varrho = \varphi t$$

ist $$S.\varphi' t\, \varphi'' t(\omega - \varrho) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

und ist auch die Tangentialebene der Fläche

$$\varrho = \varphi t + u\varphi' t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Wir wollen nun versuchen, das Verfahren, das wir bis jetzt befolgt haben, umzukehren und (2) als die Umhüllende der veränderlichen Ebene (1) darstellen.

Differentiiren wir (1) in Bezug auf t allein, so folgt:

$$S.\varphi'\varphi'''(\omega - \varrho) = 0.$$

Verbinden wir diese Gleichung mit (1), so folgt

$$\omega - \varrho \parallel V.V\varphi'\varphi'' V\varphi'\varphi''' \parallel \varphi'$$

oder $$\omega = \varrho + u\varphi' = \varphi + u\varphi',$$

die Gleichung (2).

300.) Dies führt uns zur Betrachtung der Umhüllenden im allgemeinen; das eben angewandte Verfahren kann leicht auf die Aufgabe übertragen werden: *die Umhüllende einer Reihe von Flächen zu bestimmen, deren Gleichung Eine Scalarvariabele enthält.*

Ist die gegebene Gleichung eine Scalargleichung, so erhält man die Umhüllende durch dasselbe Verfahren, wie in der gewöhnlichen Cartesischen Geometrie; doch ist die Arbeit oft einfacher und kürzer.

Ist die Gleichung in der Form gegeben

$$\varrho = \psi(t, u, v),$$

wo ψ eine Vectorfunction bedeutet, t und u die Scalarvariabeln einer jeden Fläche sind, v der Scalarparameter, so erhalten wir für eine auf die erste folgende Fläche

$$\varrho_1 = \psi(t_1, u_1, v_1) = \varrho + \psi_t' \delta t + \psi_u' \delta u + \psi_v' \delta v.$$

In allen Punkten der Linie, in welchen zwei aufeinander folgende Flächen sich schneiden, hat man

$$\psi_t' \delta t + \psi_u' \delta u + \psi_v' dv = 0.$$

Dies ist folgenden Scalargleichungen zwischen den Grössen t, u, v äquivalent:

$$S.\psi_t' \psi_u' \psi_v' = 0.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung und der Gleichung

$$\varrho = \psi(t, u, v)$$

können wir t, u, v eliminiren; die resultirende Scalargleichung ist die der gesuchten Umhüllenden.

301.) Als Beispiel wollen wir die Umhüllende der Osculationsebene einer gewundenen Curve aufsuchen. Die Gleichung jener Ebene ist (§ 299):

$$S.(\omega - \varrho)\varphi' t \varphi'' t = 0$$

oder $$\omega = \varphi t + x\varphi' t + y\varphi'' t = \psi(x, y, t),$$

wenn $$\varrho = \varphi t$$

die Gleichung der Curve ist.

Nach dem vorigen Paragraphen muss sein:

$$S.\psi_x' \psi_y' \psi_t' = 0$$

oder $$S.\varphi' t \varphi'' t[\varphi' t + x\varphi'' t + y\varphi''' t] = 0$$

oder $$yS.\varphi' t \varphi'' t \varphi''' t = 0.$$

Der zweite Factor kann nur verschwinden, wenn die Curve eben ist. Es muss also

$$y = 0$$

sein, und die Umhüllende ist

$$\omega = \varphi t + x\varphi' t,$$

die abwickelbare Fläche, deren Rückkehrkante die gegebene Curve ist (wie in § 299).

302.) Enthält die Gleichung zwei Scalarparameter, so müssen die in Bezug auf dieselben genommenen Differentialquotienten verschwinden; wir haben somit drei Gleichungen, aus denen zwei numerische Grössen zu eliminiren sind.

Eine Form, in welcher jene zwei Parameter häufig auftreten,

ist die eines unbekannten Einheits-Vectors. In diesem Falle kann man die Aufgabe so stellen:

Die Umhüllende einer Fläche zu finden, deren Scalargleichung ist

$$F(\varrho, \alpha) = 0,$$

wo α der Einen Bedingung unterworfen ist

$$T\alpha = 1.$$

Differentiiren wir allein in Bezug auf α, so folgt:

$$S\nu d\alpha = 0, \qquad S\alpha d\alpha = 0.$$

wo ν eine bekannte Vectorfunction von ϱ und α ist. Da $d\alpha$ eine unendliche Anzahl von Werthen haben kann, so folgt aus jenen Gleichungen

$$V\alpha\nu = 0.$$

Dies ist gleichbedeutend mit zwei Scalarbedingungen; und diese, im Verein mit den zwei gegebenen Scalargleichungen, erlauben α zu eliminiren.

Diese kurze Auseinandersetzung und die Beispiele, die folgen, werden den Leser in den Stand setzen, derartige Aufgaben, die sich auf Umhüllende beziehen, zu behandeln.

303.] *Die Umhüllende einer Ebene zu bestimmen, deren Entfernung vom Anfangspunkte constant ist.*

Hier ist $S\alpha\varrho = -c,$

mit der Bedingung $T\alpha = 1.$

Nach dem vorigen Paragraphen muss

$$V\varrho\alpha = 0$$

und $$\varrho = c\alpha$$

oder $$T\varrho = c$$

sein; die Kugel vom Radius Eins, wie zu erwarten stand.

Suchen wir die Umhüllende von nur den Ebenen, die einem gegebenen Vector parallel sind, so tritt die Bedingung hinzu

$$S\alpha\beta = 0.$$

In diesem Falle sind die drei differentiirten Gleichungen

$$S\varrho d\alpha = 0, \qquad S\alpha d\alpha = 0, \qquad S\beta d\alpha = 0,$$

und liefern $$S.\alpha\beta\varrho = 0.$$

Hieraus $$\alpha = U.\beta V\beta\varrho,$$

und die Umhüllende ist $$TV\beta\varrho = cT\beta,$$

der Kreiscylinder vom Radius c und der Achse β.

Setzen wir $S\alpha\beta = e$, wo e eine von Null verschiedene Constante ist, so greifen wir alle jene Ebenen heraus, die in einem bestimm-

ten Winkel gegen β geneigt sind; als Umhüllende dieser Ebenen erhalten wir einen geraden Kegel.

304.) Die Gleichung $S^2\alpha\varrho + 2S.\alpha\beta\varrho = b$

stellt einen parabolischen Cylinder dar, dessen Erzeugende dem Vector $\alpha V\alpha\beta$ parallel sind. Die Gleichung ist nämlich zweiten Grades, und ändert sich nicht, wenn man ϱ um $x\alpha V\alpha\beta$ vermehrt; die Fläche schneidet Ebenen, die auf α senkrecht stehen, in Einer Geraden; Ebenen, die auf $V\alpha\beta$ senkrecht stehen, in zwei parallelen Geraden.

Die Gestalt und die Lage der Fläche hängen natürlich ab von den Werthen von α, β, b. *Man suche die Umhüllende*, wenn β und b constant sind, und α der einen Scalarbedingung unterworfen ist

$$T\alpha = 1.$$

Das Verfahren des § 302 liefert:

$$\varrho S\alpha\varrho + V\beta\varrho = x\alpha.$$

Operiren wir mit $S.\alpha$, so folgt:

$$S^2\alpha\varrho + S.\alpha\beta\varrho = -x$$

und dies liefert $$S.\alpha\beta\varrho = x + b.$$

Operirt man aber einmal mit $S.V\beta\varrho$, ein anderes mal mit $S.\varrho$, so folgt:

$$(V\beta\varrho)^2 = xS.\alpha\beta\varrho$$

und $$(\varrho^2 - x)S\alpha\varrho = 0.$$

Lassen wir vorläufig den Factor $S\alpha\varrho$ fallen, so erhalten wir aus jenen drei Gleichungen durch Elimination von x und α

$$(V\beta\varrho)^2 = \varrho^2(\varrho^2 + b),$$

dies ist die Gleichung der gesuchten Umhüllenden.

Es ist dies eine Rotationsfläche vierter Ordnung, deren Achse β ist; um deren Natur besser zu erkennen, setzen wir

$$c^2\varrho^{-1} = \omega,$$

die Gleichung wird $$(V\beta\omega)^2 = c^4 + b\omega^2,$$

und dies ist eine auf den Mittelpunkt bezogene Rotationsfläche zweiten Grades.

Die gesuchte Umhüllende ist also die *Reciproke* einer derartigen Fläche in dem Sinne, dass das Product zweier Vectoren von gleicher Richtung constant ist.

Ein merkwürdiger specieller Fall ist der, wo

$$b + \beta^2 = 0;$$

die Umhüllende zerfällt dann in zwei gleiche Kugeln, die sich im Anfangspunkte berühren:

$$\varrho^2 = \pm S\beta\varrho;$$

aus der entsprechenden Fläche zweiter Ordnung werden zwei parallele Ebenen:

$$S\beta\omega = \pm c^2.$$

305.) Die partikuläre Lösung, auf welche wir oben stiessen, nämlich

$$S\alpha\varrho = 0,$$

beschränkt die ursprüngliche Aufgabe; wir haben jetzt die Umhüllende einer Linie statt einer Fläche zu suchen. Diese Gleichung, zusammengenommen mit der Gleichung des parabolischen Cylinders, liefert jene Erzeugende des Cylinders, welche der geometrische Ort ist, der Scheitel der parabolischen Hauptschnitte.

Die Gleichungen werden:

$$2S.\alpha\beta\varrho = b,$$
$$S\alpha\varrho = 0,$$
$$T\alpha = 1;$$

hieraus: $$V\beta\varrho = x\alpha;$$

dies liefert $$x = -S.\alpha\beta\varrho = -\frac{b}{2}$$

und $$TV\beta\varrho = \frac{b}{2}.$$

Die Umhüllende ist ein Kreiscylinder, dessen Achse β ist. [Man beachte, dass obige Gleichungen verlangen

$$S\alpha\beta = 0.$$

Die Aufgabe, die wir gelöst haben, war also, *die Umhüllende eines parabolischen Cylinders zu suchen, der um seine Brennlinie rotirt.* Wir haben diese Discussion nur deshalb unternommen, um eine Eigenthümlichkeit in einem frühern Resultate zu erklären; diese Resultate können natürlich unmittelbar durch ein sehr einfaches Verfahren hergeleitet werden.]

306.) Die Gleichung

$$S\alpha\beta S.\alpha\beta\varrho = a^2,$$

mit der Bedingung $$T\alpha = 1,$$

stellt eine Reihe von hyperbolischen Cylindern dar. *Man soll deren Umhüllende aufsuchen.*

Wie oben haben wir:

$$\varrho S.\alpha\beta\varrho + V\beta\varrho\, S\alpha\varrho = x\alpha.$$

Operiren wir hierauf mit $S.\alpha$, $S.\varrho$ und $S.V\beta\varrho$, so folgt:

$$2a^2 = -x,$$
$$\varrho^2 S.\alpha\beta\varrho = xS\alpha\varrho,$$
$$(V\beta\varrho)^2 S\alpha\varrho = xS.\alpha\beta\varrho.$$

Eliminiren wir α und x, so erhalten wir als Gleichung der Umhüllenden

$$\varrho^2(V\beta\varrho)^2 = 4a^4.$$

Vergleichen wir dies mit den Gleichungen

$$\varrho^2 = -2a^2$$

und $$(V\beta\varrho)^2 = -2a^2,$$

welche eine Kugel und einen derselben umschriebenen Cylinder darstellt; wir sehen, dass, wenn wir vom Anfangspunkte aus in derselben Richtung Radien der drei Flächen ziehen, der Radius der neuen Fläche das geometrische Mittel der beiden andern ist.

307.) *Die Umhüllende aller Kugeln zu finden, die eine gegebene Gerade berühren und ihre Mittelpunkte in einer andern Geraden haben.*

Es sei $$\varrho = \beta + y\gamma$$

die von allen Kugeln berührte Gerade; $x\alpha$ der Vector des Mittelpunktes einer derselben; die Gleichung ist (nach § 200 oder § 201)

$$\gamma^2(\varrho - x\alpha)^2 = -(V.\gamma(\beta - x\alpha))^2.$$

Setzen wir der Einfachheit wegen, doch ohne Einbusse an Allgemeinheit,

$$T\gamma = 1, \qquad S\alpha\beta = 0, \qquad S\beta\gamma = 0,$$

so dass β die kürzeste Vectorentfernung zwischen den gegebenen Geraden ist:

$$(\varrho - x\alpha)^2 = (\beta - x\alpha)^2 + x^2S^2\alpha\gamma,$$

und schliesslich $$\varrho^2 - \beta^2 - 2xS\alpha\varrho = x^2S^2\alpha\gamma.$$

Hieraus, nach § 300, $$-2S\alpha\varrho = 2xS^2\alpha\gamma.$$

[Dies liefert keine bestimmte Umhüllende (ausser den Anfangspunkt), wenn

$$S\alpha\gamma = 0,$$

d. h. wenn die Gerade der Mittelpunkte senkrecht steht auf der Geraden, welche alle Kugeln berühren.]

Eliminiren wir x, so erhalten wir als Gleichung der Umhüllenden

$$S^2\alpha\varrho + S^2\alpha\gamma(\varrho^2 - \beta^2) = 0.$$

Dies ist eine Rotationsfläche zweiter Ordnung, deren Achse α ist.

Da nach der Form der Gleichung $T\varrho$ jeden Werth grösser als $T\beta$ annehmen kann, und da der Schnitt mit der Ebene

$$S\alpha\varrho = 0$$

ein reeller Kreis auf der Kugel

$$\varrho^2 - \beta^2 = 0$$

ist, so ist die Fläche ein einschaliges Hyperboloid.

[Es wird dem Leser von Nutzen sein, die Vorzeichen von g_1,

g_2, g_3 zu bestimmen, wie in § 165, und hieraus die obigen Folgerungen zu beweisen.]

308.) Zum Schluss wollen wir die Umhüllende des hyperbolischen Cylinders

$$S\alpha\varrho S\beta\varrho - c = 0$$

bestimmen.

Die Vectoren α und β sind der Bedingung unterworfen

$$T\alpha = T\beta = 1,$$

$$S\alpha\gamma = 0, \qquad S\beta\delta = 0,$$

wo γ und δ gegebene Vectoren sind.

[Man sieht, dass zwei von den sechs Scalaren, die in α, β vorkommen, als variabele Parameter bleiben.]

Wir haben

$$S\alpha d\alpha = 0, \qquad S\gamma d\alpha = 0,$$

so dass $$d\alpha = x V\alpha\gamma.$$

Dem entsprechend $$d\beta = y V\beta\delta.$$

Aber aus der Gleichung der Cylinder:

$$S\alpha\varrho S\varrho d\beta + S\varrho d\alpha S\beta\varrho = 0$$

oder $$yS\alpha\varrho S.\beta\delta\varrho + xS.\alpha\gamma\varrho S\beta\varrho = 0.$$

Aus der Natur der vorliegenden Aufgabe folgt, dass weder $S\alpha\varrho$ noch $S\beta\varrho$ verschwinden kann; die Unabhängigkeit von $d\alpha$ und $d\beta$ erfordert also

$$S.\alpha\gamma\varrho = 0, \qquad S.\beta\delta\varrho = 0.$$

Hieraus: $$\alpha = U.\gamma V\gamma\varrho, \qquad \beta = U.\delta V\delta\varrho,$$

und die Umhüllende ist:

$$T.V\gamma\varrho V\delta\varrho - cT\gamma\delta = 0,$$

eine Fläche vierter Ordnung. Man kann dieselbe construiren, indem man das geometrische Mittel nimmt aus der Länge von zwei gleichgerichteten Radien zweier gleichen geraden Cylinder, deren Achsenmittelpunkte zusammentreffen.

309.) Wir können jetzt folgenden allgemeinen Satz aussprechen.

Nehmen wir an, die Gleichung der Reihe von Flächen, deren Umhüllende wir suchen, enthalte m Vector- und n Scalarparameter; dieselben sollen p Vector- und q Scalarbedingungen unterworfen sein.

Im ganzen gibt es also $3m + n$ Scalarparameter, die $3p + q$ Scalarbedingungen unterworfen sind.

Soll es eine Umhüllende geben, so muss im allgemeinen sein:

$$(3m + n) - (3p + q) = 1 \text{ oder } = 2.$$

In dem ersten Falle ist die umhüllende Fläche gegeben als geome-

trischer Ort einer Reihe von *Curven*, in dem zweiten einer Reihe von *Punkten*.

Durch Differentiation der Gleichungen erhalten wir $3p+q+1$ Gleichungen, linear und homogen in den $3m+n$ Differentialen der Scalarparameter; eliminiren wir diese, so haben wir zum Schluss *eine* Scalargleichung in dem ersten Falle, *zwei* in dem zweiten; in jedem Falle haben wir eben Gleichungen genug, um alle willkürlichen Parameter zu eliminiren.

310.) *Den geometrischen Ort des Fusspunktes des Perpendikels zu finden, das vom Anfangspunkte auf die Tangentialebene einer beliebigen Fläche gefällt ist.*

Ist $$S\nu d\varrho = 0$$
die differentiirte Gleichung der Fläche, so ist die Gleichung der Tangentialebene
$$S(\omega - \varrho)\nu = 0\,.$$
Wir können die Bedingung einführen
$$S\nu\varrho = 1\,,$$
dies ändert im allgemeinen den Tensor von ν, so dass jetzt ν^{-1} das gesuchte Vectorperpendikel ist, da es der Gleichung
$$S\omega\nu = 1$$
genügt.

Es bleibt noch ϱ zu eliminiren zwischen der Gleichung der gegebenen Fläche und der Vectorgleichung
$$\omega = \nu^{-1}\,,$$
wir erhalten dann die gesuchte Scalargleichung in ω.

Es sei zum Beispiel die Fläche das Ellipsoid
$$S\varrho\varphi\varrho = 1\,,$$
wir haben $$\omega^{-1} = \nu = \varphi\varrho\,,$$
die gesuchte Gleichung ist
$$S\omega^{-1}\varphi^{-1}\omega^{-1} = 1$$
oder $$S\omega\varphi^{-1}\omega = \omega^4\,,$$
es ist dies Fresnel's Elasticitätsfläche (§ 263).

Zu bemerken ist, dass diese Gleichung folgt aus der Gleichung des reciproken Ellipsoids
$$S\varrho\varphi^{-1}\varrho = 1\,,$$
indem man ω^{-1} an Stelle von ϱ setzt.

311.) *Die Reciproke einer gegebenen Fläche zu finden in Bezug auf die Einheitskugel, deren Mittelpunkt im Anfangspunkte liegt.*

Die Bedingung $$S\varrho\nu = 1$$
zeigt, dass $-\nu$ der Vector des Pols der Tangentialebene

$$S(\omega - \varrho)\nu = 0$$

ist. Wir haben also zu setzen

$$\omega = -\nu$$

und ϱ mit Hilfe der Gleichung der gegebenen Fläche zu eliminiren.

Nehmen wir das Ellipsoid des vorigen Paragraphen, so haben wir

$$\omega = -\varphi\varrho\,,$$

so dass die reciproke Fläche wird

$$S\omega\varphi^{-1}\omega = 1\,.$$

Wendet man dasselbe Verfahren nochmals an, so erhält man wieder das erste Ellipsoid.

Dies ist eine allgemeine Eigenschaft, denn

$$S\varrho\nu = 1$$

liefert durch Differentiation, wenn man die Bedingung

$$S\nu d\varrho = 0$$

berücksichtigt, die neue Relation

$$S\varrho d\nu = 0\,,$$

so dass ϱ und ν entsprechende Vectoren der beiden Flächen sind: jeder derselben ist der Vector des Pols der Tangentialebene im Endpunkte des andern.

312.) Ist die gegebene Fläche ein Kegel mit der Spitze im Anfangspunkte, so haben wir einen speciellen Fall. Hier geht jede Tangentialebene durch den Anfangspunkt, und der gesuchte geometrische Ort liegt ganz im Unendlichen. Die Schwierigkeit liegt darin, das $S\varrho\nu$ in diesem Falle zum numerischen Multiplum einer Grösse wird, die hier Null ist; wir dürfen also nicht setzen

$$S\varrho\nu = 1\,.$$

313.) Die Eigenschaften des Normal-Vectors erlauben die partiellen Differentialgleichungen von Klassen von Curven in einer einfachen Form zu schreiben.

So ist die charakteristische Eigenschaft der *Cylinder*, dass alle Erzeugende parallel sind; ν muss also immer einer gegebenen Ebene parallel sein, oder

$$S\alpha\nu = 0\,.$$

Es ist dies die Quaternionenform der bekannten Gleichung:

$$l\frac{dF}{dx} + m\frac{dF}{dy} + n\frac{dF}{dz} = 0\,.$$

Um diese Gleichung zu integriren, müssen wir uns daran erinnern, dass stets

$$S\nu d\varrho = 0\,.$$

Da ν senkrecht auf α steht, kann es ausgedrückt werden durch zwei beliebige Vectoren β und γ, die auf α senkrecht stehen.

Also $$\nu = x\beta + y\gamma$$

und $$xS\beta d\varrho + yS\gamma d\varrho = 0.$$

Dies zeigt, dass $S\beta\varrho$ und $S\gamma\varrho$ gleichzeitig constant und gleichzeitig variabel sind, es ist also:

$$S\beta\varrho = f(S\gamma\varrho),$$

wo f eine beliebige Scalarfunction bedeutet.

314.) In *Rotationsflächen* trifft die Normale die Achse. Legen wir den Anfangspunkt in die Achse α, so haben wir

$$S.\alpha\varrho\nu = 0$$

oder $$\nu = x\alpha + y\varrho,$$

hieraus $$xS\alpha d\varrho + yS\varrho d\varrho = 0$$

und das Integral $$T\varrho = f(S\alpha\varrho).$$

Die gewöhnlichere Form, die man hieraus ableiten kann, ist

$$TV\alpha\varrho = F(S\alpha\varrho).$$

Für den *Kegel* ist $$S\nu\varrho = 0$$

und deshalb

$$S\nu d\varrho = S.\nu(T\varrho dU\varrho + U\varrho dT\varrho) = T\varrho S\nu dU\varrho.$$

Hieraus $$S\nu dU\varrho = 0;$$

so dass ν eine Function von $U\varrho$ sein muss, und das Integral ist deshalb

$$f(U\varrho) = 0;$$

dies drückt einfach aus, dass in der Gleichung der Tensor von ϱ nicht vorkommt, d. h. in Cartesischen Coordinaten ist die Gleichung homogen.

315.) *Trägt man gleiche Längen auf die Normalen einer Fläche auf, so steht die Fläche, welche durch die Endpunkte dieser Geraden gebildet wird, auf diesen selben Geraden senkrecht.*

Wir haben nämlich

$$\omega = \varrho + aU\nu,$$

und $$S\nu d\omega = S\nu d\varrho + aS\nu dU\nu = 0,$$

und dies beweist den Satz.

Wählt man als Beispiel die Fläche

$$S\varrho\varphi\varrho = 1,$$

so wird obige Gleichung

$$\omega = \varrho + \frac{a\varphi\varrho}{T\varphi\varrho},$$

so dass $$\varrho = \left(\frac{a\varphi}{T\varphi\varrho} + 1\right)^{-1}\omega;$$

die Gleichung der neuen Fläche erhält man, indem man $\frac{a}{T\varphi\varrho}$ (das wir mit x bezeichnen) eliminirt zwischen den Gleichungen

$$1 = S.(x\varphi + 1)^{-1}\omega\varphi(x\varphi + 1)^{-1}\omega,$$

und $$-\frac{a^2}{x^2} = S.\varphi(x\varphi + 1)^{-1}\omega\varphi(x\varphi + 1)^{-1}\omega.$$

316.) Man sieht aus jenem Paragraphen, dass, wenn man eine orthogonale Fläche ziehen kann, welche ein System gegebener Geraden schneidet, es unendlich viele derartige Flächen gibt, und dass die Theile jener Geraden, welche zwischen zwei Flächen fallen, von gleicher Länge sind.

Die allgemeine Gleichung eines Systems von Geraden sei

$$\varrho = \sigma + x\tau,$$

wo σ und τ Vectorfunctionen von ϱ sind und x eine beliebige Scalar ist. Wir haben

$$S\tau d\varrho = 0 = S(\varrho - \sigma)d\varrho$$

als differentiirte Gleichung der Reihe von orthogonalen Flächen, wenn diese existiren. Hieraus ergibt sich folgende Aufgabe.

317.) *Das Kriterium zu finden dafür, dass die Gleichung*

$$S\nu d\varrho = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

integrabel ist, als vollständiges Differential der Gleichung einer Reihe von Flächen.

Hamilton hat (Elements p. 702) eine sehr elegante Lösung dieser Aufgabe gegeben mit Hilfe der Eigenschaften der linearen Vectorfunctionen. Wir schlagen einen andern, etwas weitläufigern Weg ein wegen einiger Resultate, zu denen wir so gelangen und die uns im nächsten Kapitel von Nutzen sein werden; und auch deshalb, weil der Leser den Zusammenhang sehen wird zwischen unserer Methode und denjenigen der gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Nehmen wir an, $$F\varrho = C$$

sei das Integral und wenden den merkwürdigen, von Hamilton erdachten Operator an

$$\nabla = i\frac{d}{dx} + j\frac{d}{dy} + k\frac{d}{dz};$$

wir erhalten $$\nabla F = i\frac{dF}{dx} + j\frac{dF}{dy} + k\frac{dF}{dz}.$$

Nun ist $$\varrho = ix + jy + kz,$$

hieraus $$d\varrho = idx + jdy + kdz$$

und $$0 = dF = \frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{dz}dz = -Sd\varrho\nabla F.$$

Vergleichen wir dies mit der gegebenen Gleichung, so sehen wir, dass dieselbe eine Reihe von Flächen darstellt, wenn ν oder ein Scalarmultiplum davon als ∇F dargestellt werden kann.

Ist $$\nu = \nabla F,$$

so haben wir $$\nabla\nu = \nabla^2 F = \left(\frac{d^2F}{dx^2} + \frac{d^2F}{dy^2} + \frac{d^2F}{dz^2}\right),$$

ein wohlbekannter, sehr wichtiger Ausdruck, auf den wir im nächsten Kapitel zurückkommen werden.

Wir bemerken, dass jene zuletzt geschriebenen Grössen nothwendiger Weise Scalaren sind. Die einzige Bedingung, der (1) zu genügen hat, um integrabel zu sein, ist:

$$V\nabla\nu = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Erfüllt ν diese Bedingung nicht, so genügt es vielleicht derselben, wenn es mit einer Scalar multiplicirt wird.

Dies liefert die weitere Bedingung

$$V\nabla(w\nu) = 0,$$

welche wir schreiben können:

$$V\nu\nabla w - wV\nabla\nu = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Dies verlangt, dass $$S\nu\nabla\nu = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Wird also (2) nicht erfüllt, so müssen wir (4) versuchen; wird der Gleichung (4) genügt, so wird w aus (3) gefunden; in jedem Falle ist Gleichung (1) unmittelbar integrabel.

[Setzen wir

$$d\nu = \varphi d\varrho,$$

wo φ eine lineare Vectorfunction ist, die nicht nothwendiger Weise selbstconjugirt ist, so haben wir

$$V\nabla\nu = V\left(i\frac{d\nu}{dx} + \ldots\right) = V(i\varphi i + \ldots) = -\varepsilon$$

nach § 173. Ist φ selbstconjugirt, so ist $\varepsilon = 0$ und das Kriterium (2) ist erfüllt. Ist φ nicht selbstconjugirt, so haben wir aus (4) das Kriterium

$$S\varepsilon\nu = 0.$$

Diese Resultate stimmen mit denen Hamilton's überein, doch wurden sie auf ganz anderm Wege erhalten.]

318.) Als einfaches Beispiel wählen wir zunächst *Gerade, die von einem Punkte ausgehen.*

Hier ist $\nu \parallel \varrho$ und wir sehen, dass, wenn

$$\nu = \varrho,$$
$$\nabla\nu = -3,$$

(2) ist also erfüllt. Die Gleichung ist

$$S\varrho d\varrho = 0;$$

ihr Integral $$T\varrho = C$$

liefert eine Reihe concentrischer Kugeln.

Gerade, die auf einer festen Geraden senkrecht stehen und dieselbe schneiden.

Ist α die feste Gerade, β irgend eine der andern Geraden, so haben wir

$$S.\alpha\beta\varrho = 0, \qquad S\alpha\beta = 0, \qquad S\beta d\varrho = 0,$$

hieraus

$$\nu \parallel \alpha V\alpha\varrho,$$

und demselben gleich, da (2) erfüllt ist.

Weiter

$$S.d\varrho\alpha V\alpha\varrho = 0$$

oder

$$S.V\alpha\varrho V\alpha d\varrho = 0,$$

dessen Integral die Gleichung einer Reihe von geraden Cylindern ist:

$$T^2 V\alpha\varrho = C.$$

319.) *Die orthogonalen Trajectorien einer Reihe von Kreisen zu bestimmen, deren Mittelpunkte in einer gegebenen Geraden liegen, und deren Ebenen senkrecht stehen auf jenen Geraden.*

Es sei α ein Einheits-Vector in Richtung jener Geraden; einer jener Kreise hat dann die Gleichung

$$\left.\begin{aligned} T\varrho &= C \\ S\alpha\varrho &= C' \end{aligned}\right\},$$

wo C und C' beliebige Constanten sind.

Für die gesuchten Flächen haben wir

$$\nu \parallel d_1\varrho \parallel V\alpha\varrho,$$

wo $d_1\varrho$ ein Element eines der Kreise ist, ν die Normale der orthogonalen Fläche. Es sei nun $d\varrho$ ein Element einer Tangente der orthogonalen Fläche, so haben wir

$$S\nu d\varrho = S.\alpha\varrho d\varrho = 0.$$

Hieraus folgt, dass $d\varrho$ in derselben Ebene liegt, wie α und ϱ, d. h. die orthogonalen Flächen sind Ebenen, welche durch die gemeinschaftliche Achse gehen.

[Um die Gleichung $S.\alpha\varrho d\varrho = 0$

zu integriren, müssen wir nach § 317 einen Factor einführen. Denn

$$\begin{aligned} V\nabla V\alpha\varrho &= V(iV\alpha i + jV\alpha j + kV\alpha k) \\ &= 2\alpha, \end{aligned}$$

der ersten Bedingung wird also nicht genügt. Aber

$$S.V\alpha\varrho V\nabla V\alpha\varrho = 2S.\alpha V\alpha\varrho = 0,$$

das zweite Kriterium ist also erfüllt. Es liefert nach (3) § 317

$$V.\nabla w V\alpha\varrho + 2w\alpha = 0,$$

oder

$$\varrho S\alpha\nabla w - \alpha S\varrho\nabla w + 2w\alpha = 0;$$

das heisst:
$$\left.\begin{aligned} S\alpha \nabla w &= 0, \\ S\varrho \nabla w &= 2w. \end{aligned}\right\}$$

Diese Gleichungen werden erfüllt durch

$$w = \frac{1}{V^2 \alpha \varrho}.$$

Doch findet man leicht eine einfachere Methode, diese Gleichung zu integriren. Wir können dieselbe schreiben:

$$0 = S.\alpha V \frac{d\varrho}{\varrho} = S\alpha \frac{dU\varrho}{U\varrho} = d.S\alpha \log U\frac{\varrho}{\beta},$$

und diese Gleichung ist unmittelbar integrabel; β ist ein willkürlicher aber constanter Vector.

Da wir in diesem Werke die *Logarithmen* von Versoren und die entsprechenden Winkel von Quaternionen nicht behandelt haben, so verweisen wir auf Hamilton's *Elements* zur weitern Entwickelung dieses Gegenstandes.]

320.) *Die orthogonalen Trajectorien einer gegebenen Reihe von Flächen zu finden.*

Wenn die Gleichung $F\varrho = C$

liefert $S\nu d\varrho = 0,$

so ist die Gleichung der orthogonalen Curven

$$V\nu d\varrho = 0.$$

Dies ist äquivalent zwei Scalardifferentialgleichungen (§ 197), welche, wenn die Aufgabe möglich ist, Flächen angehören, deren Schnittlinien die gesuchten Linien sind. Wir überlassen es dem Leser, das Kriterium dafür aufzustellen.

Die Flächen seien concentrische Kugeln.

Hier ist $\varrho^2 = C$

und $V\varrho d\varrho = 0.$

Hieraus $T\varrho^2 dU\varrho = -U\varrho V\varrho d\varrho = 0,$

und das Integral $U\varrho = \text{const.},$

Gerade, welche durch den Mittelpunkt gehen.

Die Flächen seien Kugeln, die einander in einem gemeinschaftlichen Punkte berühren.

Die Gleichung ist (§ 218)

$$S\alpha\varrho^{-1} = C,$$

hieraus $V.\varrho\alpha\varrho d\varrho = 0.$

Die Integrale kann man schreiben

$$S.\alpha\beta\varrho = 0, \qquad \varrho^2 + hTV\alpha\varrho = 0.$$

Die erste Gleichung (β ist ein beliebiger Vector) stellt eine Ebene

dar, die durch den gemeinschaftlichen Durchmesser geht; die zweite eine Reihe von Ringen oder *Tores* (§ 323), die gebildet werden durch die Drehung um α von Kreisen, die jene Linie berühren in dem Punkte, der den Kugeln gemeinsam ist.

Die Flächen seien ähnliche, ähnlich gelegene und concentrische Flächen zweiter Ordnung.

Hier ist $$S\varrho\chi\varrho = C,$$
deshalb $$V\chi\varrho d\varrho = 0.$$
Nach § 290 ist das Integral dieser Gleichung
$$\varrho = e^{t\chi}\varepsilon$$
$$= \varphi^t\varepsilon,$$
wo χ und φ wie in § 290 zusammenhängen; ε ist ein beliebiger constanter Vector.

321.) *Die lineare partielle Differentialgleichung einer Familie von Flächen zu integriren.*

Die Gleichung (man vergleiche § 313)
$$P\frac{du}{dx} + Q\frac{du}{dy} + R\frac{du}{dz} = 0$$
kann auf die sehr einfache Form gebracht werden:
$$S(\sigma\nabla)u = 0,$$
wenn wir setzen $$\sigma = iP + jQ + kR,$$
und $$\nabla = i\frac{d}{dx} + j\frac{d}{dy} + k\frac{d}{dz}.$$
Dies liefert $$\nabla u = mV\vartheta\sigma,$$
wo m eine Scalar und ϑ ein Vector ist, in dessen Tensor man m hätte einschliessen können, es aber nicht gethan hat aus einem besondern Grunde.

Hieraus folgt:
$$du = -S(d\varrho\nabla)u$$
$$= -mS.\vartheta\sigma d\varrho$$
$$= -S\vartheta d\tau,$$
wenn wir setzen $$d\tau = mV\sigma d\varrho,$$
so dass m ein Integrationsfactor ist von $V\sigma d\varrho$.

Kann ein Werth von m gefunden werden, so folgt aus der Form der obigen Gleichung, dass ϑ eine Function von τ allein sein muss; das Integral ist also
$$u = F(\tau) = \text{const.},$$
wo F eine willkürliche Scalarfunction ist.

So ist die Differentialgleichung der *Cylinder*
$$S(\alpha\nabla)u = 0,$$

wo α ein constanter Vector ist. Hier ist $m = 1$, und

$$u = F(V\alpha\varrho) = \text{const.}$$

Die Differentialgleichung der Kegel, wenn die Spitze im Anfangspunkte liegt, ist

$$S(\varrho\nabla)u = 0.$$

Hier ist der Ausdruck, der integrabel gemacht werden soll:

$$V\varrho d\varrho.$$

Hamilton hat nun schon vor langer Zeit gezeigt (§ 133 (2)), dass

$$\frac{dU\varrho}{d\varrho} = V\frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{V\varrho d\varrho}{(T\varrho)^2},$$

dies zeigt, welchen Werth man m zu geben hat, und liefert

$$u = F(U\varrho) = \text{const.}$$

Man sieht leicht ein, dass dies nur einer der vielen Wege ist, die man einschlagen kann, um die Differentialgleichung zu integriren. Man kann zum Beispiel von der Annahme, dass m eine Scalar ist, übergehen zur Annahme eines Vector integrirenden Factors, und das gewöhnliche Kriterium dafür herleiten, dass die Gleichung integrabel sei. Man kann ohne Schwierigkeiten das Verfahren dem Falle anpassen, wo das Glied auf der rechten Seite ein Multiplum von u ist.

In der That scheint auf diese Weise ein klares Licht auf die ganze Theorie der Integration der partiellen Differentialgleichungen geworfen zu werden. Wählen wir an Stelle von $S(\sigma\nabla)$ andere Operatoren, wie $S(\sigma\nabla)S(\tau\nabla)$, $S.\sigma\nabla\tau\nabla$ u. s. w. (wo ∇ auf u allein oder auch auf andere Grössen wirken kann), so können wir zu linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung übergehen Aehnliche Sätze kann man erhalten durch Vectoroperationen, wie $V(\sigma\nabla)$.*

322.) *Die allgemeine Gleichung der Flächen aufzustellen, welche durch eine Gerade beschrieben werden, die stets eine feste Gerade in rechtem Winkel schneidet.*

Ist α die feste Gerade, und bilden β und γ mit derselben ein rechtwinkliges Einheits-System, dann ist eine Form der Gleichung:

$$\varrho = x\alpha + y(\beta + z\gamma),$$

wo y jeden Werth annehmen kann, x und z aber von einander abhängen.

Eine andere Form der Gleichung, welche die willkürliche Relation zwischen x und z ausdrückt, ist:

$$\frac{S\gamma\varrho}{S\beta\varrho} = f(S\alpha\varrho).$$

---

* Tait, Proc. R. S. E. 1869—70.

Wir können aber auch schreiben:

$$\varrho = \alpha F(x) + y\alpha^x\beta,$$

da es dieselben Bedingungen ausdrückt.

Der einfachste Fall ist

$$F(x) = hx.$$

Die Fläche schneidet jeden geraden Cylinder, der α zur Achse hat, in einer geraden Schraubenlinie.

323.) *Der Mittelpunkt einer Kugel bewegt sich in einem gegebenen Kreise; die Gleichung des beschriebenen Ringes aufzustellen.*

Es sei α die Einheits-Vectorachse des Kreises, dessen Mittelpunkt der Anfangspunkt, r dessen Halbmesser, a derjenige der Kugel.

Dann ist $$(\varrho - \beta)^2 = -a^2$$

die Gleichung der Kugel in einer beliebigen Lage, wenn

$$S\alpha\beta = 0, \qquad T\beta = r.$$

Dies liefert $$S.\alpha\beta\varrho = 0$$

und β muss jetzt eliminirt werden. Das Resultat ist:

$$\beta = r\alpha\, UV\alpha\varrho,$$

dies liefert $$(\varrho^2 - r^2 + a^2)^2 = 4r^2 T^2 V\alpha\varrho$$

$$= 4r^2(-\varrho^2 - S^2\alpha\varrho),$$

und dies ist die gewünschte Gleichung. Man kann ihr die Form geben

$$(\varrho^2 - a^2 + r^2)^2 = -4a^2\varrho^2 - 4r^2 S^2\alpha\varrho \quad \ldots\ldots (1)$$

und diese Form erlaubt uns, einen unmittelbaren Beweis der merkwürdigen Eigenschaft des Ringes zu geben, die Villarceau entdeckte.

Denn die Ebenen

$$S\varrho\left(\alpha \pm \frac{a\beta}{r\sqrt{r^2 - a^2}}\right) = 0,$$

welche beide ausgedrückt werden durch

$$r^2(r^2 - a^2)S^2\alpha\varrho - a^2 S^2\beta\varrho = 0,$$

gehen offenbar durch den Anfangspunkt und berühren (und schneiden) den Ring.

Die letzte Gleichung kann auch geschrieben werden:

$$r^2 S^2\alpha\varrho - a^2(S^2\alpha\varrho + S^2\varrho\, U\beta) = 0$$

oder $$r^2 S^2\alpha\varrho + a^2(\varrho^2 + S^2.\alpha\varrho\, U\beta) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Die ebenen Schnitte von (2) und (1) liegen offenbar auf der neuen Fläche

$$(\varrho^2 - a^2 + r^2)^2 = 4a^2 S^2.\alpha\varrho\, U\beta,$$

die aus zwei Kugeln vom Radius r besteht, wie man sieht, indem man der Gleichung die Form gibt

$$(\varrho \pm a\alpha\, U\beta)^2 + r^2 = 0.$$

324.) Es ist lehrreich, diese Aufgabe von einem andern Gesichtspunkte aus zu behandeln, besonders als Uebung zum Transformiren.

Ein Kreis dreht sich um eine Achse, die durch den Kreis hindurch geht; die Senkrechte vom Mittelpunkte auf die Achse soll in der Ebene des Kreises liegen; man zeige, dass für eine gewisse Lage der Achse derselbe Körper entstehen kann durch Drehung eines Kreises um eine äussere Achse, die in seiner Ebene gelegen ist.

Es sei $a = \sqrt{b^2 + c^2}$ der Radius des Kreises, i die Vectordrehungsachse, $-c\alpha$ (wo $T\alpha = 1$) die Vectorsenkrechte vom Mittelpunkte auf die Achse, und der Vector

$$bi + ci\alpha$$

sei senkrecht auf der Ebene des Kreises.

Die Gleichungen des Kreises sind

$$\left.\begin{aligned} (\varrho - c\alpha)^2 + b^2 + c^2 = 0, \\ S\left(i + \tfrac{c}{b}\, i\alpha\right)\varrho = 0, \end{aligned}\right\}$$

und

$$\begin{aligned} -\varrho^2 &= S^2 i\varrho + S^2\alpha\varrho + S^2 . i\alpha\varrho, \\ &= S^2 i\varrho + S^2\alpha\varrho + \frac{b^2}{c^2} S^2 i\varrho \end{aligned}$$

nach der zweiten der Gleichungen des Kreises. Aber aus der ersten folgt:

$$(\varrho^2 + b^2)^2 = 4c^2 S^2 \alpha\varrho = -4(c^2\varrho^2 + a^2 S^2 i\varrho),$$

dies ist leicht umzuwandeln in

$$(\varrho^2 - b^2)^2 = -4a^2(\varrho^2 + S^2 i\varrho),$$

oder

$$\varrho^2 - b^2 = -2aTVi\varrho .$$

Bringen wir dies in die Form

$$\varrho^2 - b^2 = 2aS\beta\varrho,$$

und

$$(\varrho - a\beta)^2 + c^2 = 0,$$

wo β ein Einheits-Vector ist, der auf i senkrecht steht und in der Ebene von i und ϱ liegt, so sehen wir, dass die Fläche beschrieben wird durch einen Kreis vom Radius c, der um i, eine Achse in seiner Ebene, sich dreht. Diese Achse ist um a vom Mittelpunkte entfernt.

Diese Aufgabe ist nicht sehr geeignet, den Gewinn an Kürze und Deutlichkeit zu zeigen, den der Gebrauch der Quaternionen gewöhnlich zur Folge hat; denn schon die Natur der Aufgabe weist darauf hin, rechtwinklige Coordinaten einzuführen und Scalargleichungen aufzustellen; die Lösung, die wir gegeben haben, unterscheidet sich wenig von einer gewöhnlichen Cartesischen.

325.) *Eine Fläche wird erzeugt durch eine Gerade, die zwei feste Geraden schneidet; die allgemeine Gleichung aufzustellen.*

Schneiden sich die gegebenen Geraden, so gibt es keine Fläche ausser der Ebene, die sie enthält.

Die Gleichungen jener Geraden seien:

$$\varrho = \alpha + x\beta, \qquad \varrho = \alpha_1 + x_1\beta;$$

jeder Punkt der Fläche genügt also der Bedingung § 30:

$$\varrho = y(\alpha + x\beta) + (1-y)(\alpha_1 + x_1\beta_1) \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

y kann jeden beliebigen Werth annehmen. Um eine bestimmte Fläche zu erhalten, müssen wir eine Relation zwischen x und x_1 haben. Mit Hilfe derselben kann dann x_1 aus (1) eliminirt werden, welches dann die gewöhnliche Form der Gleichung einer Fläche annimmt

$$\varrho = \varphi(x, y).$$

Wir können auch auf (1) operiren mit $V.(\alpha + x\beta - \alpha_1 - x_1\beta_1)$, so dass wir eine Vectorgleichung erhalten, die äquivalent ist zwei Scalargleichungen §§ 98, 116, und y nicht enthält. Hieraus kann man dann x und x_1 durch ϱ ausgedrückt erhalten und die allgemeine Gleichung der möglichen Flächen kann geschrieben werden

$$f(x, x_1) = 0,$$

wo f eine willkürliche Scalarfunction ist und x und x_1 durch ϱ ausgedrückt sind.

Dies Verfahren kann auch angewandt werden, wenn wir an Stelle von zwei Geraden zwei beliebige Curven haben, durch welche die Gerade gehen muss; es kann selbst dann noch angewandt werden, wenn die Erzeugende selbst eine gegebene Curve ist, die in einer bestimmten Weise im Raume gelegen ist. Aber einige Beispiele werden das ganze Verfahren klar machen.

326.) *Die bewegliche Gerade sei der Bedingung unterworfen, stets einer festen Ebene parallel zu bleiben.*

Wir haben dann neben (1) die Gleichung

$$S\gamma(\alpha_1 + x_1\beta_1 - \alpha - x\beta) = 0,$$

wo γ ein auf der festen Ebene senkrechter Vector ist.

Die Aufgabe verliert nichts an Allgemeinheit, wenn wir annehmen, dass α und α_1 die beliebige Vectoren sind, die vom Anfangspunkte nach den festen Geraden gehen, beide auf γ senkrecht stehen. Denn könnten wir zum Beispiel nicht setzen $S\gamma\alpha = 0$, so würde folgen $S\gamma\beta = 0$, die gesuchte Fläche wäre entweder unmöglich oder eine Ebene — Fälle, die wir nicht zu betrachten haben.

Wir erhalten also:

$$x_1 S\gamma\beta_1 - xS\gamma\beta = 0.$$

Eliminiren wir mit Hilfe dieser Gleichung x_1 aus (1) im vorigen Paragraphen, so folgt

$$\varrho = y(\alpha + x\beta) + (1-y)\left(\alpha_1 + x\beta_1 \frac{S\gamma\beta}{S\gamma\beta_1}\right).$$

Operiren wir mit drei beliebigen nicht-complanaren Vectoren und mit dem Zeichen S, so erhalten wir drei Gleichungen, aus welchen x und y eliminirt werden können.

Wir operiren mit $S.\gamma$ und erhalten:

$$S\gamma\varrho = xS\gamma\beta;$$

eliminiren wir x mit Hilfe dieser Gleichung, so haben wir schliesslich

$$S.\varrho\left(\alpha + \frac{\beta S\gamma\varrho}{S\beta\gamma}\right)\left(\alpha_1 + \frac{\beta_1 S\gamma\varrho}{S\beta_1\gamma}\right) = 0,$$

welches von der dritten Ordnung zu sein scheint. In der That ist die Gleichung aber von der zweiten Ordnung, da in Folge unserer Annahme wir haben

$$V\alpha\alpha_1 \parallel \gamma$$

und $S\gamma\varrho$ ist deshalb ein eingeschobener Factor auf der linken Seite.

327.) *Die festen Geraden sollen aufeinander senkrecht stehen; die beweglichen Geraden sollen durch eine Kreislinie gehen, deren Mittelpunkt in dem gemeinschaftlichen Perpendikel liegt und dessen Ebene jene Gerade halbirt und senkrecht auf derselben steht.*

Die Gleichungen der festen Geraden können wir schreiben:

$$\varrho = \alpha + x\beta, \qquad \varrho = -\alpha + x_1\gamma,$$

wo α, β, γ aufeinander senkrecht stehen; wir können annehmen, die beiden letzten seien Einheits-Vectoren.

Der Kreis hat die Gleichungen

$$\varrho^2 = -a^2, \qquad S\alpha\varrho = 0.$$

Gleichung (1) § 325 wird

$$\varrho = y(\alpha + x\beta) + (1-y)(-\alpha + x_1\gamma).$$

Hieraus $S\alpha^{-1}\varrho = y - (1-y) = 0$ oder $y = \frac{1}{2}$,

und $\varrho^2 = -a^2 = (2y-1)^2\alpha^2 - x^2y^2 - x_1{}^2(1-y)^2$

oder $4a^2 = (x^2 + x_1{}^2)$;

nehmen wir jetzt an, die Tensoren von β und γ seien jeder $2a$, so können wir setzen $x = \cos\vartheta$, $x_1 = \sin\vartheta$, und hieraus

$$\varrho = (2y-1)\alpha + y\beta\cos\vartheta + (1-y)\gamma\sin\vartheta;$$

zum Schluss $$\frac{S^2\beta\varrho}{(1+S\alpha^{-1}\varrho)^2} + \frac{S^2\gamma\varrho}{(1-S\alpha^{-1}\varrho)^2} = 4a^4.$$

Für diesen einfachen Fall hat die Lösung nichts vor der Cartesischen voraus; der Leser wird aber leicht einsehen, dass wir dies

Resultat nach geringen Umänderungen auf Fälle anwenden können, die lange nicht so symmetrisch sind als dieser. Man nehme z. B. an, β und γ seien nicht senkrecht aufeinander; weiter sei die Ebene des Kreises nicht ihrer Ebene parallel u. s. w. Weiter, man operire auf jede Linie im Raume mit der linearen Vectorfunction φ; der Kreis wird dann zur Ellipse, die Geraden bleiben Gerade. Wählen wir eine Form φ, deren Hauptachsen parallel α, β, γ sind, so bleiben die Elemente der Aufgabe symmetrisch, sonst aber nicht. Wir werden in dem folgenden Kapitel hierauf zurückkommen.

328.) *Die Krümmung eines Normalschnittes einer Mittelpunktfläche zweiter Ordnung zu finden.*

In dieser und den ähnlichen Aufgaben, die folgen, ist es einfacher, Infinitesimale an Stelle von Differentialen anzuwenden; obwohl für eingehende Untersuchungen des Gegenstandes die letztere Methode vorzuziehen ist, wie man in Hamilton's *Elements* sehen kann.

Wir haben $$S\varrho\varphi\varrho = 1,$$

und ist $\varrho + \delta\varrho$ auch ein Vector der Fläche, so haben wir in aller Strenge, *welches auch der Tensor von* $\delta\varrho$ *sei,*

$$S(\varrho + \delta\varrho)\varphi(\varrho + \delta\varrho) = 1.$$

Hieraus $$2S\delta\varrho\varphi\varrho + S\delta\varrho\varphi\delta\varrho = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Nun ist $\varphi\varrho$ senkrecht auf der Tangentialebene im Endpunkte von ϱ; nennen wir t die Entfernung des Punktes $\varrho + \delta\varrho$ von jener Ebene, so ist

$$t = -S\delta\varrho U\varphi\varrho,$$

und (1) kann geschrieben werden

$$2tT\varphi\varrho - T^2\delta\varrho S.U\delta\varrho\varphi U\delta\varrho = 0.$$

Die Krümmung des Schnittes ist

$$L\frac{2t}{T^2\delta\varrho},$$

oder aus der letzten Gleichung

$$\frac{1}{T\varphi\varrho} LS.U\delta\varrho\varphi U\delta\varrho.$$

Im Grenzfall ist $\delta\varrho$ ein Vector in der Tangentialebene; es sei ω der Vectorhalbmesser der Fläche, der $\delta\varrho$ parallel ist; die Gleichung der Fläche gibt

$$T^2\omega S.U\omega\varphi U\omega = 1,$$

die Krümmung des Normalschnittes im Punkte ϱ in der Richtung ω ist also:

$$\frac{1}{T\varphi\varrho T^2\omega},$$

dem Perpendikel vom Anfangspunkte auf die Tangentialebene direkt

proportional, und umgekehrt proportional dem Quadrate des Halbmessers, der der Tangente parallel ist. Ein bekannter Satz.

329.) Mit Hilfe der bekannten Eigenschaften der Centralschnitte, welche der Tangentialebene parallel sind, liefert uns dieser Satz alle die gewöhnlichen Eigenschaften der Richtungen der grössten und kleinsten Krümmung; es folgt unmittelbar, dass diese Richtungen aufeinander senkrecht stehen; man erhält einen Ausdruck, in dem die Krümmung eines beliebigen Schnittes gegeben ist durch die Hauptkrümmungen und die Neigung jener Ebene zu einander, u. s. w., alles ohne weitere Rechnung.

Wenn wir in einem folgenden Paragraphen gezeigt haben werden, wie man eine Osculationsfläche zweiter Ordnung in einem beliebigen Punkte einer gegebenen Fläche finden kann, so werden damit diese Eigenschaften auf Flächen im allgemeinen ausgedehnt sein. Wir wollen jetzt eine andere merkwürdige Eigenschaft der Flächen zweiten Grades beweisen, welche durch eine ähnliche Ueberlegung auf alle Flächen übertragen wird.

Die Gleichung der Normalen im Punkte $\varrho + \delta\varrho$ der im vorigen Paragraphen behandelten Fläche ist:

$$\omega = \varrho + \delta\varrho + x\varphi(\varrho + \delta\varrho) \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

dies schneidet die Normale in ϱ (§§ 203, 210), wenn

$$S.\delta\varrho\varphi\varrho\varphi\delta\varrho = 0,$$

das heisst, nach § 273, wenn $\delta\varrho$ parallel ist dem grössten oder kleinsten Durchmesser des der Tangentialebene parallelen Centralschnittes.

Sind σ_1 und σ_2 jene Durchmesser, so können wir im allgemeinen schreiben

$$\delta\varrho = p\sigma_1 + q\sigma_2,$$

wo p und q unendlich kleine Scalaren sind.

Ziehen wir durch einen Punkt P in der Normalen in ϱ eine Gerade parallel mit σ_1, so können wir deren Gleichung schreiben

$$\omega = \varrho + a\varphi\varrho + y\sigma_1;$$

die kürzeste Entfernung zwischen der folgenden Normalen und dieser Geraden beträgt (§ 203)

$$S.(\alpha\varphi\varrho - \delta\varrho)\,UV\sigma_1\varphi(\varrho + \delta\varrho);$$

vernachlässigt man Glieder höherer Ordnung:

$$\frac{1}{TV\sigma_1\varphi\varrho}(apS.\varphi\varrho\sigma_1\varphi\sigma_1 + aqS.\varphi\varrho\sigma_1\varphi\sigma_2 + qS.\sigma_1\sigma_2\varphi\varrho).$$

Das erste Glied in der Klammer verschwindet, da σ_1 ein Hauptvector des der Tangentialebene parallelen Schnittes ist. Der Ausdruck wird also

$$q\left(\frac{a}{T\sigma_2} - T\sigma_2\right).$$

Nehmen wir $a = T\sigma_2^2$, so ist die Entfernung der Normalen von der neuen Geraden nur von der zweiten Ordnung. Die Entfernung von P vom Berührungspunkte ist dann $T\varphi\varrho T\sigma_2^2$, d. h. gleich dem Hauptkrümmungsradius in der Tangentiallinie parallel σ_2.

Das heisst: *errichtet man in der Nähe eines Punktes einer Mittelpunktfläche zweiter Ordnung eine Gruppe von Normalen, so gehen dieselben durch zwei Geraden, deren jede parallel ist einer Tangente eines Hauptschnittes, und durch den Krümmungsmittelpunkt des andern Hauptschnittes geht.*

Der Leser wird diesen Satz besser verstehen, wenn er sich vorstellt, ein kleines quadratisches Stück einer Ebene, mit den Normalen in jedem Punkte, werde leicht gebogen in Ebenen, die auf den Kanten senkrecht stehen; der Betrag der Biegung sei verschieden in den verschiedenen Ebenen.

Die erste Biegung wird zur Folge haben, dass die Normalen durch die Achse des Cylinders gehen, von dem die Fläche nun einen Theil ausmacht; die zweite Biegung wird diesen Zustand wenig ändern und nur die Gerade, in welcher die Normalen sich schneiden, verlängern oder verkürzen; diese Biegung wird aber auch zur Folge haben, dass die Normalen sich in der Achse des neuen Cylinders schneiden, der auf dem ersten senkrecht steht. Ein schmales Lichtbündel mit seinen Focallinien bietet diese Erscheinung; es ist dies die Folge davon, dass, wenn eine Reihe von Strahlen ursprünglich auf einer Fläche senkrecht steht, dieselben nach einer beliebigen Anzahl von Reflexionen und Brechungen immer senkrecht stehen auf einer gewissen Fläche (§ 315).

330.) Um diese Sätze auf Flächen im allgemeinen auszudehnen, haben wir nur zu beweisen, wie Hamilton gezeigt hat, dass, wenn wir schreiben

$$d\nu = \varphi d\varrho,$$

φ eine selbstconjugirte Function ist; die Eigenschaften von φ, die in frühern Kapiteln dargelegt wurden, kommen dann zur Anwendung.

Der Leser sieht, dass dies nur eine andere Form der Untersuchung des § 317 ist. Wir führen dieselbe durch um zu zeigen, welche grosse Zahl von einfachen Beweisen fast aller Quaternionensätze man geben kann.

Der Vector ν wird definirt durch eine Gleichung der Form

$$df\varrho = S\nu d\varrho,$$

wo f eine Scalarfunction ist. Operiren wir hierauf mit einem andern, unabhängigen Differentiationszeichen δ, so folgt:

$$\delta df\varrho = S\delta\nu d\varrho + S\nu\delta d\varrho .$$

Auf dieselbe Weise folgt:

$$d\delta f\varrho = Sd\nu\delta\varrho + S\nu d\delta\varrho .$$

Da nun d und δ von einander unabhängig sind, so sind die Glieder auf der linken Seite und die zweiten Glieder auf der rechten, wenn sie überhaupt vorkommen, einender gleich, und wir erhalten

$$S\delta\nu d\varrho = Sd\nu\delta\varrho ;$$

setzen wir

$$d\nu = \varphi d\varrho ,$$

und folglich

$$\delta\nu = \varphi\delta\varrho ,$$

so wird obige Gleichung

$$S\delta\varrho\varphi d\varrho = Sd\varrho\varphi\delta\varrho$$

und somit ist der Satz bewiesen.

331.) Schreiben wir die Differentialgleichung einer Fläche in der Form

$$df\varrho = 2S\nu d\varrho ,$$

so sieht man, dass

$$f(\varrho + d\varrho) = f\varrho + 2S\nu d\varrho + Sd\nu d\varrho + \ldots ,$$

die übrigen Glieder enthalten als Factoren die dritte und höhere Potenzen von $Td\varrho$. Berücksichtigen wir nur Glieder zweiter Ordnung, so können wir schreiben (singuläre Punkte ausgenommen)

$$0 = 2S\nu d\varrho + Sd\nu d\varrho ,$$

und wie oben (§ 228) ist die Krümmung des Normalschnittes, dessen Tangente $d\varrho$ ist,

$$\frac{1}{T\nu} S\frac{d\nu}{d\varrho} .$$

332.) Wir haben im vorigen Paragraphen einen Schritt gemacht, der zwar sehr einfach ist, in der That aber voraussetzt, dass die drei ersten Glieder der Entwickelung von $f(\varrho + d\varrho)$ nach dem Taylor'schen Satze gebildet werden sollen; wir haben aber in diesem Werke nicht nachgewiesen, dass dieser Satz angewendet werden kann auf Scalarfunctionen von Quaternionen (§ 135); wir geben deshalb eine andere Untersuchung der Krümmung eines Normalschnittes und gehen aus von den Formeln des § 282.

Sehen wir $d\varrho$ als Curvenelement an, so haben wir

$$S\nu d\varrho = 0 ,$$

oder, wenn s die unabhängige Variabele ist:

$$S\nu\varrho' = 0 ,$$

hieraus, durch nochmalige Differentiation

$$S\frac{d\nu}{ds}\varrho' + S\nu\varrho'' = 0 .$$

Die Krümmung ist also, da $\nu \parallel \varrho''$ und $T\varrho' = 1$:

$$T\varrho'' = -\frac{1}{T\nu} S\frac{d\nu}{d\varrho}\varrho'^2 = \frac{1}{T\nu} S\frac{d\nu}{d\varrho},$$

wie oben.

333.) Wir haben nachgewiesen, dass in

$$d\nu = \varphi dr$$

φ eine selbstconjugirte lineare Vectorfunction ist, deren Constanten nur von der Natur der Fläche und der Lage der Berührungspunkte der Tangentialebene abhängen. So lange diese sich nicht ändern, behält φ die Eigenschaften, welche in Kapitel V dargestellt wurden.

Da der Ausdruck für $T\varrho''$ den Tensor von $d\varrho$ nicht enthält, so können wir statt $d\varrho$ einen beliebigen Einheits-Vector τ setzen, der der Bedingung unterliegt:

$$S\nu\tau = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

und die Krümmung des Normalschnittes, dessen Tangente τ ist, ist

$$\frac{1}{T\nu} S\frac{\varphi\tau}{\tau} = -\frac{1}{T\nu} S\tau\varphi\tau.$$

Betrachten wir den Centralschnitt der Fläche zweiter Ordnung

$$S\omega\varphi\omega + T\nu = 0$$

und der Ebene

$$S\nu\omega = 0,$$

so sehen wir, *dass die Krümmung der gegebenen Fläche in dem Normalschnitt, dessen Tangente τ ist, umgekehrt proportional ist dem Quadrate des parallelen Radius in der Hilfsfläche.* Dies schliesst Euler's und andere bekannte Sätze ein.

334.) *Die Richtungen der grössten und kleinsten Krümmung zu finden.*

Wir haben $S\tau\varphi\tau = \text{max. oder min.}$

mit den Bedingungen $S\nu\tau = 0$

$$T\tau = 1.$$

Durch Differentiation erhalten wir wie in § 273

$$S.\nu\tau\varphi\tau = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Ist τ eine der beiden gesuchten Richtungen, so ist $\tau' = \tau U\nu$ die andere, denn der zuletzt geschriebenen Gleichung kann man die Form geben

$$S.\tau U\nu\varphi(\nu\tau U\nu) = 0,$$

d. h. $$S.\tau'\varphi(\nu\tau') = 0$$

oder $$S.\nu\tau'\varphi\tau' = 0.$$

Die Schnitte der grössten und der kleinsten Krümmung stehen also aufeinander senkrecht.

Wir erhalten wie in § 273 folgende Gleichung

$$S.\nu(\varphi + S\tau\varphi\tau)^{-1}\nu = 0,$$

deren Wurzeln durch $T\nu$ dividirt die gesuchten Krümmungen sind.

335.) Ehe wir diese kurze Einleitung in einen Gegenstand verlassen, der erschöpfend in Hamilton's *Elements* behandelt ist, wollen wir eine Bemerkung machen über Gleichung (1) des vorigen Paragraphen:

$$S.\nu\tau\varphi\tau = 0,$$

oder wie man schreiben kann, wenn man auf die Bezeichnungsweise des § 333 zurückgeht,

$$S.\nu d\varrho d\nu = 0.$$

Dies ist die allgemeine Gleichung der Krümmungslinien. Wir definiren eine Krümmungslinie auf irgend einer Fläche als eine solche Linie, dass Normalen benachbarter Punkte sich schneiden; ist $\delta\varrho$ ein Element einer solchen Linie, so müssen die Normalen

$$\omega = \varrho + x\nu \quad \text{und} \quad \omega = \varrho + \delta\varrho + y(\nu + \delta\nu)$$

sich schneiden. Nach § 203 liefert dies die Bedingung

$$S.\delta\varrho\nu\delta\nu = 0$$

wie oben.

Uebungsbeispiele zu Kapitel IX.

1. Die Länge eines beliebigen Bogens einer sphärischen Curve zu finden, die so gezogen ist, dass sie einen constanten Winkel mit einem festen Durchmesser einschliesst.

2. Man zeige, dass, wenn die Normalebene einer Curve stets eine feste Gerade enthält, diese Curve ein Kreis ist.

3. Den Radius der sphärischen Krümmung der Curve

$$\varrho = \varphi t$$

zu finden. Man stelle die Gleichung auf des geometrischen Ortes des Mittelpunktes der sphärischen Krümmung.

4. (Hamilton, Bishop Law's Premium Examination 1854.)

(a) Ist ϱ der veränderliche Vector einer Curve im Raume, und ist $d\varkappa = 0$, dann ist in Folge der Gleichung

$$dT(\varrho - \varkappa) = 0$$

$\varkappa$ der Vector eines Punktes der Normalebene der Curve.

(b) Sind $d\varkappa$ und $d^2\varkappa$ beide $= 0$, so stellen die Gleichungen

$$dT(\varrho - \varkappa) = 0, \qquad d^2T(\varrho - \varkappa) = 0$$

die Achse des Elementes dar, das heisst die Gerade, welche

durch den Mittelpunkt des Osculationskreises geht und auf der Osculationsebene senkrecht steht.

(*c*) Das System der drei Gleichungen, in denen $\varkappa$ constant ist,

$$dT(\varrho - \varkappa) = 0, \quad d^2T(\varrho - \varkappa) = 0, \quad d^3T(\varrho - \varkappa) = 0,$$

bestimmt den Vector $\varkappa$ des Mittelpunktes der Osculationssphäre.

(*d*) An Stelle der drei letzten Gleichungen können wir die folgenden setzen:

$$S(\varrho - \varkappa)d\varrho = 0,$$
$$S(\varrho - \varkappa)d^2\varrho + d\varrho^2 = 0,$$
$$S(\varrho - \varkappa)d^3\varrho + 3S.d\varrho d^2\varrho = 0.$$

(*e*) Welches auch die unabhängige und Scalarvariabele sein mögen, von welchen der variabele Vector ϱ der Curve abhängt, so kann der Vector $\varkappa$ des Mittelpunktes der Osculationssphäre ausgedrückt werden wie folgt:

$$\varkappa = \varrho + \frac{3Vd\varrho d^2\varrho Sd\varrho d^2\varrho - d\varrho^2 Vd\varrho d^3\varrho}{S.d\varrho d^2\varrho d^3\varrho}.$$

(*f*) Im allgemeinen

$$d(\varrho^{-2}Vd\varrho U\varrho) = d(T\varrho^{-3}V\varrho d\varrho)$$
$$= T\varrho^{-5}(3V\varrho d\varrho S\varrho d\varrho - \varrho^3 V\varrho d^2\varrho);$$

hieraus:

$$3V\varrho d\varrho S\varrho d\varrho - \varrho^2 V\varrho d^2\varrho = \varrho^4 T\varrho d(\varrho^{-2}Vd\varrho U\varrho);$$

der obige Ausdruck für $\varkappa$ kann also auf die Form gebracht werden:

$$\varkappa = \varrho + \frac{d\varrho^4 d(d\varrho^{-2}V.d^2\varrho Ud\varrho)}{S.d^2\varrho d^3\varrho Ud\varrho}.$$

(*g*) Ist die Länge des Curvenelements constant, $dTd\varrho = 0$, so vereinfacht sich jener Ausdruck. Wir erhalten:

$$\varkappa = \varrho + \frac{d.d^2\varrho d\varrho^3}{S.d\varrho d^2\varrho d^3\varrho};$$

oder

$$\varkappa = \varrho + \frac{Vd^3\varrho d\varrho^3}{S.d\varrho d^2\varrho d^3\varrho}.$$

(*h*) Nachzuweisen, dass dieser Ausdruck $\varkappa = 0$ liefert, für eine Curve, die auf einer Kugel liegt, deren Mittelpunkt im Anfangspunkte liegt. Oder man zeige, dass, wenn

$$dT\varrho = 0, \quad d^2T\varrho = 0, \quad d^3T\varrho = 0 \quad \text{und} \quad dTd\varrho = 0,$$

dass dann folgt

$$\varrho S.d\varrho^{-1}d^2\varrho d^3\varrho = Vd\varrho d^3\varrho.$$

5. Die Gleichung der Curve aufzustellen, die so beschaffen ist, dass von jedem Punkte derselben aus drei gegebene Kugeln gleichgross erscheinen.

6. Nachzuweisen, dass der geometrische Ort des Punktes, für welchen die Differenz der Entfernungen von je zwei von drei gegebenen Punkten constant ist, eine ebene Curve ist.

7. Die Gleichung der Curve aufzustellen, die alle Seiten eines Kegels zweiter Ordnung unter einem gegebenen Winkel schneidet.

Die Länge eines beliebigen Bogens dieser Curve auszudrücken durch die Entfernungen der Endpunkte desselben von der Kegelspitze.

8. Weshalb ist der Mittelpunkt der sphärischen Krümmung einer auf einer Kugel beschriebenen Curve nicht nothwendig der Mittelpunkt der Kugel?

9. Die Gleichung der abwickelbaren Fläche aufzustellen, deren Erzeugende die Schnittlinien sind von aufeinander folgenden Normalebenen einer gewundenen Curve.

10. Die Länge des Bogens einer gewundenen Curve zu finden, deren Normalebenen gleichweit vom Anfangspunkte entfernt sind.

11. Die Reciproken der Perpendikel vom Anfangspunkte auf die Tangentialebenen einer abwickelbaren Fläche sind Vectoren einer gewundenen Curve; aus den Osculationsebenen derselben kann die Rückkehrkante der ursprünglichen Fläche durch dasselbe Verfahren erhalten werden.

12. Die Gleichung

$$\varrho = V\alpha^t\beta,$$

wo α ein Einheits-Vector ist, der nicht auf β senkrecht steht, stellt eine Ellipse dar. Man setze $\gamma = V\alpha\beta$ und zeige, dass die Gleichungen des geometrischen Ortes des Krümmungsmittelpunktes sind:

$$S.\beta\gamma\varrho = 0,$$

$$S^{\frac{2}{3}}\beta\varrho + S^{\frac{2}{3}}\gamma\varrho = (\beta SU\alpha\beta)^{\frac{4}{3}}.$$

13. Die absoluten Krümmungshalbmesser eines sphärischen Kegelschnittes aufzustellen.

14. Wird ein Kegel in einem Kreise geschnitten durch eine Ebene, die auf einem Strahle senkrecht steht, so geht die Achse des osculierenden geraden Kegels, der den Kegel in diesem Strahle berührt, durch den Mittelpunkt jenes Schnittes.

15. Man zeige, wie der Vector eines Nabelpunktes gefunden werden kann. Man wende die Methode an auf die Flächen

$$S\varrho\varphi\varrho = 1,$$

und

$$S\alpha\varrho S\beta\varrho S\gamma\varrho = 1.$$

16. Man suche den geometrischen Ort der Nabelpunkte der Flächen

$$S\varrho(\varphi + h)^{-1}\varrho = 1,$$

wo h ein willkürlicher Parameter ist.

17. Man zeige, wie man die Gleichung einer Tangentialebene auffinden kann, die eine Fläche in einer Geraden oder in einer Curve berührt. Man suche derartige Ebenen auf für die folgenden Flächen:

$$S\varrho\varphi\varrho = 1,$$

$$S\varrho(\varphi - \varrho^2)^{-1}\varrho = 1$$

und $$(\varrho^2 - a^2 + b^2)^2 + 4(a^2\varrho^2 + b^2 S^2\alpha\varrho) = 0.$$

18. Die Bedingung aufzustellen, dass die Gleichung

$$S(\varrho + \alpha)\varphi\varrho = 1,$$

wo φ eine selbstconjugirte lineare Vectorfunction ist, ein Kegel sei.

19. Man zeige aus der allgemeinen Gleichung, dass Kegel und Cylinder die einzigen abwickelbaren Flächen zweiter Ordnung sind.

20. Die Gleichung der Umhüllenden der Ebenen aufzustellen, die in jedem Punkte eines Ellipsoids senkrecht auf dem Radiusvector vom Mittelpunkte stehen.

21. Die Gleichung der Umhüllenden der Kugeln aufzustellen, deren Mittelpunkte auf einer gegebenen Kugel liegen, und welche durch einen gegebenen Punkt gehen.

22. Den geometrischen Ort aufzusuchen des Fusspunktes des Perpendikels vom Mittelpunkte auf die Tangentialebene eines ein- oder zweischaligen Hyperboloids.

23. Hamilton, Bishop Law's Premium Examination, 1852.

(*a*) Ist ϱ der Vector einer Curve im Raume, so ist die Länge des Elementes jener Curve $Td\varrho$; und die Variation der Länge eines begrenzten Bogens der Curve ist

$$\delta\int Td\varrho = -\int SUd\varrho\,\delta d\varrho = -\triangle SUd\varrho\,\delta\varrho + \int SdUd\varrho\,\delta\varrho.$$

(*b*) Ist die Curve eine kürzeste Linie auf einer gegebenen Fläche, deren Vectornormale ν ist, so dass $S\nu\delta\varrho = 0$, so muss diese geodätische Linie der Differentialgleichung

$$V\nu dUd\varrho = 0$$

genügen. Für die Endpunkte des Bogens haben wir die Grenzgleichungen

$$SUd\varrho_0\delta\varrho_0 = 0; \qquad SUd\varrho_1\delta\varrho_1 = 0.$$

Man deute diese Resultate.

(*c*) Für eine Kugelfläche ist $V\nu\varrho = 0$, $\varrho dUd\varrho = 0$; die integrirte Gleichung der geodätischen Linien ist $\varrho Ud\varrho = \omega$; dies liefert $S\omega\varrho = 0$ (grösster Kreis).

Für eine beliebige Cylinderfläche ist

$$S\alpha\nu = 0, \qquad \alpha dUd\varrho = 0;$$

das Integral zeigt, dass die geodätische Linie im allgemeinen

eine Schraubenlinie ist, die einen constanten Winkel mit den erzeugenden Geraden des Cylinders einschliesst.

(*d*) Für eine beliebige Kegelfläche:

$$S\nu\varrho = 0, \qquad S\varrho dU d\varrho = 0;$$

man integrire diese Differentialgleichung und leite daraus ab:

$$TV\varrho U d\varrho = \text{const.}$$

Man deute dies Resultat; man zeige, dass das Perpendikel von der Kegelspitze auf die Tangente einer gegebenen geodätischen Linie constant ist; dies gibt die geradlinige Abwickelung.

Ist der Kegel vom zweiten Grade, so ist diese Eigenschaft ein specieller Fall eines Satzes, der sich auf confocale Flächen bezieht.

(*e*) Für eine Rotationsfläche:

$$S.\alpha\varrho\nu = 0, \qquad S.\alpha\varrho dU d\varrho = 0;$$

die Integration liefert:

$$\text{const.} = S.\alpha\varrho U d\varrho = TV\alpha\varrho SU(V\alpha\varrho . d\varrho);$$

die senkrechte Entfernung eines Punktes auf einer geodätischen Linie von der Drehungsachse ist umgekehrt proportional dem Cosinus des Winkels, unter welchem die geodätische Linie den Parallelkreis der Fläche schneidet.

(*f*) Die Differentialgleichung $S.\alpha\varrho dU d\varrho = 0$ wird nicht nur durch die geodätischen Linien erfüllt, sondern auch durch die Kreise auf einer Rotationsfläche; man gebe die Erklärung dieser Thatsache und man zeige, dass dies daher rührt, dass die Normalebenen der Kreise und die Meridianebenen der Fläche zusammenfallen.

(*g*) Für eine beliebige Fläche kann man die Gleichung der geodätischen Linien auf die Form bringen

$$S.\nu d\varrho d^2\varrho = 0;$$

diese Form ist abzuleiten, und nachzuweisen, dass sie eine Eigenschaft der Osculationsebenen ausspricht.

(*h*) Ist das Element der geodätischen Linien constant, $dTd\varrho = 0$, dann kann jene allgemeine Gleichung auf die Form gebracht werden

$$V\nu d^2\varrho = 0.$$

Unter derselben Bedingung ist

$$d^2\varrho = -\nu^{-1} S d\nu d\varrho.$$

(*i*) Bringt man die Gleichung einer Mittelpunktfläche zweiter Ordnung auf die Form $f\varrho = 1$, wo f eine Scalarfunction

ist, homogen und zweiten Grades, dann hat das Differential jener Gleichung die Form $df\varrho = 2S.\nu d\varrho$, wo die Vectornormale $\nu = \varphi\varrho$ eine distributive Function von ϱ ist (homogen und ersten Grades):

$$d\nu = d\varphi\varrho = \varphi d\varrho.$$

Diese Vectornormale kann man nennen „Vector of proximity“ (nämlich des Flächenelements vom Mittelpunkte), weil die Reciproke ν^{-1} der Länge und Richtung nach das Perpendikel darstellt, das vom Mittelpunkte auf die Tangentialebene der Fläche gefällt ist.

(*k*) Setzen wir $S\sigma\varphi\varrho = f(\sigma, \varrho)$, so ist *diese* Function f commutativ in Bezug auf die *beiden* Vectoren, von welchen sie abhängt: $f(\varrho, \sigma) = f(\sigma, \varrho)$; sie hängt mit der früheren Function f eines *einzigen* Vectors ϱ zusammen durch die Relation

$$f(\varrho, \varrho) = f(\varrho),$$

so dass

$$f\varrho = S\varrho\varphi\varrho,$$

$$fd\varrho = Sd\varrho d\nu; \qquad dfd\varrho = 2S.d\nu d^2\varrho;$$

für eine geodätische Linie mit constantem Element:

$$\frac{dfd\varrho}{2fd\varrho} + S\frac{d\nu}{\nu} = 0;$$

diese Gleichung ist unmittelbar integrabel und liefert:

const. $= T\nu\sqrt{fUd\varrho}$ = die Reciproke des Joachimsthal'schen Productes PD.

(*l*) Wir geben den Namen „Didonia“ der von Delaunay untersuchten Curve, welche auf einer gegebenen Fläche und bei gegebenem Umfang den grössten Inhalt hat; für eine solche Curve haben wir den Quaternionenausdruck

$$\int S.U\nu d\varrho\delta\varrho + c\delta\int Td\varrho = 0,$$

wo c eine willkürliche Constante ist.

Man leite hieraus die Differentialgleichung zweiter Ordnung ab, die (der Constanten c wegen) einer Gleichung dritter Ordnung äquivalent ist:

$$c^{-1}d\varrho = V.U\nu dUd\varrho.$$

Geodätische Linien sind also jener Grenzfall der Didonia's, für welchen die Constante c unendlich wird.

Auf einer Ebene ist die Didonia ein Kreis, dessen Gleichung, durch Integration aus der allgemeinen Form hergeleitet, ist

$$\varrho = \omega + cU\nu d\varrho;$$

ω ist der Vector des Mittelpunktes, c der Radius des Kreises.

(*m*) Operirt man mit $S.Ud\varrho$, so nimmt die allgemeine Differentialgleichung der Didonia die Form an:

$$c^{-1}Td\varrho = S(U\nu d\varrho\,.\,dUd\varrho);$$

$$c^{-1}Td\varrho^2 = S(U\nu d\varrho\,.\,d^2\varrho);$$

$$c^{-1}Td\varrho^3 = S\,.\,U\nu d\varrho d^2\varrho;$$

$$c^{-1} = S\frac{d^2\varrho\,d\varrho^{-2}}{U\nu d\varrho}.$$

(*n*) Der Vector ω des Mittelpunktes des Osculationskreises einer Raumcurve, deren Element $Td\varrho$ constant ist, wird ausgedrückt durch

$$\omega = \varrho + \frac{d\varrho^2}{d^2\varrho}.$$

Die allgemeinen Gleichungen der Didonia werden

$$c^{-1} = S\frac{(\omega-\varrho)^{-1}}{U\nu d\varrho};$$

$$T(\varrho-\omega) = cSU\frac{\varrho-\omega}{\nu d\varrho}.$$

(*o*) Der Krümmungsradius einer Didonia ist also im allgemeinen umgekehrt proportional dem Cosinus des Winkels zwischen der Osculationsebene der Curve und der Tangentialebene der Fläche.

Und hieraus folgt nach Meunier's Satz, dass die Differenz der Quadrate der Krümmungen der Curve und der Fläche constant ist. Unter Krümmung der Fläche versteht man hier den reciproken Halbmesser der in dem Elemente der Didonia osculirenden Kugel.

(*p*) Im allgemeinen, für jede Curve auf einer beliebigen Fläche, wenn ξ der Vector des Schnittpunktes ist der Achse eines Elementes (oder der Achse des Osculationskreises der Curve) und der Tangentialebene der Fläche, dann ist:

$$\xi = \varrho + \frac{\nu d\varrho^3}{S\,.\,\nu d\varrho d^2\varrho}.$$

Für die allgemeine Didonia hat man also:

$$\xi = \varrho - cU\nu d\varrho;$$

und die Constante c bedeutet die Länge von $\varrho - \xi$, der Strecke auf der Tangentialebene zwischen einem Curvenpunkte und der Achse des osculirenden Kreises.

(*q*) Beschreibt man eine Kugel, deren Mittelpunkt in der Tangentialebene liegt und welche den osculirenden Kreis enthält, so wird der Radius dieser Kugel stets c sein.

(*r*) Obiger Ausdruck für ξ, verbunden mit der ersten Form der allgemeinen Differentialgleichung der Didonia, liefert:

$$d\xi = -cVdUvUd\varrho; \qquad Vvd\xi = 0.$$

(*s*) Hieraus oder aus der geometrischen Bedeutung der Constanten c kann man die bekannte Eigenschaft beweisen, dass, wenn man eine abwickelbare Fläche beschreibt, welche die erste Fläche in einer Didonia berührt, und wenn jene Fläche dann in eine Ebene ausgebreitet wird, dass dann die Curve im allgemeinen in einen Kreisbogen vom Radius c ausgestreckt wird.

24. Die Bedingung aufzustellen, dass die Gleichung

$$S\varrho(\varphi + f)^{-1}\varrho = 1$$

drei reelle Werthe von f für jeden gegebenen Werth von ϱ liefere.

Ist f eine Function eines Scalarparameters ξ, so soll man nachweisen, welche Form die Function haben muss, damit

$$-\nabla^2\xi = \frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{d^2\xi}{dy^2} + \frac{d^2\xi}{dz^2} = 0.$$

Nachzuweisen, dass folgende Relation zwischen f und ξ besteht:

$$c\xi = \int \frac{df}{\sqrt{(g_1+f)(g_2+f)(g_3+f)}} = \int \frac{df}{\sqrt{m_f}},$$

in der Bezeichnungsweise des § 147.

25. Nachzuweisen, nach Hamilton, dass der Beweis des Dupinschen Satzes, dass eine jede Fläche, aus einer von drei Reihen orthogonaler Flächen, eine jede Fläche der beiden anderen Reihen in ihren Krümmungslinien schneidet, in Quaternionen, wie folgt, ausgedrückt werden kann. Wenn

$$Svd\varrho = 0, \qquad Sv'd\varrho = 0, \qquad S.vv'd\varrho = 0$$

integrabel sind, und wenn

$$Svv' = 0,$$

dann hat $Vv'd\varrho = 0$ zur Folge

$$S.vv'dv = 0.$$

Oder wie folgt. Wenn

$$Sv\nabla v = 0, \quad Sv'\nabla v' = 0, \quad Sv''\nabla v'' = 0 \quad \text{und} \quad V.vv'v'' = 0,$$

dann ist

$$Sv''(Sv'\nabla . v) = 0,$$

wo

$$\nabla = i\frac{d}{dx} + j\frac{d}{dy} + k\frac{d}{dz}.$$

26. Nachzuweisen, dass die Gleichung

$$V\alpha\varrho = \varrho V\beta\varrho$$

die Schnittlinie darstellt eines Cylinders und eines Kegels zweiter Ordnung, die β zur gemeinschaftlichen Erzeugenden haben.

27. Zwei Kugeln werden beschrieben mit ihren Mittelpunkten in A, B, wo $\overline{OA} = \alpha$, $\overline{OB} = \beta$, und den Radien a, b. Eine beliebige Gerade OPQ, die vom Anfangspunkte ausgeht, schneide sie in P und Q. Nachzuweisen, dass der geometrische Ort des Schnittes von AP, BQ die Form hat:

$$V(\alpha + aU(\varrho - \alpha))(\beta + bU(\varrho - \beta)) = 0.$$

Nachzuweisen, dass dies einschliesst:

$$S.\alpha\beta\varrho = 0,$$

dass also die linke Seite ein Scalarvielfaches von $V.\alpha\beta$ ist, dass der geometrische Ort also eine ebene Curve ist.

Man zeige, dass in dem speciellen Falle

$$V\alpha\beta = 0$$

der geometrische Ort die Fläche ist, welche entsteht durch die Drehung eines Cartesischen Ovals um seine Achse.

Kapitel X.

Kinematik.

336.) Wenn der Vector ϱ eines Punktes eine Function der Zeit t ist, so sahen wir (§ 36), dass dessen Vectorgeschwindigkeit ausgedrückt wird durch $\frac{d\varrho}{dt}$ oder in Newton's Bezeichnungsweise durch $\dot{\varrho}$.

Das heisst, ist $$\varrho = \varphi t$$ die Gleichung der Bahn, *welche nicht nur die Gestalt der Bahn enthält, sondern auch das Gesetz, nach welchem dieselbe beschrieben wird,* dann liefert

$$\dot{\varrho} = \varphi' t$$

die Gestalt des *Hodographen* und das Gesetz, nach welchem derselbe beschrieben wird.

Man sieht unmittelbar, dass die Vectorbeschleunigung der Bewegung des Punktes

$$\frac{d^2\varrho}{dt^2} = \ddot{\varrho}$$

die Vectorgeschwindigkeit in dem Hodographen ist. Die fundamentalen Eigenschaften des Hodographen können auf diese Weise so zu sagen rein aus der Anschauung bewiesen werden.

337.) Aendert man die unabhängige Variabele, so erhält man

$$\dot{\varrho} = \frac{d\varrho}{ds}\,\frac{ds}{dt} = v\varrho',$$

wenn wir, wie früher schon, $\frac{d}{ds}$ mit einem Strich andeuten. Dies zeigt nur in einer andern Form, dass $\dot{\varrho}$ die Geschwindigkeit bedeutet der Grösse und Richtung nach. Eine zweite Differentiation liefert

$$\ddot{\varrho} = \dot{v}\varrho' + v^2\varrho''.$$

Dies zeigt, dass die Vectorbeschleunigung in zwei Componenten zerlegt werden kann; die erste ist in der Richtung der Bewegung und der Grösse nach gleich der Beschleunigung der Geschwindigkeit, $\dot{v}$ oder $\frac{dv}{dt}$; die zweite, $v^2\varrho''$, fällt in die Richtung der Krüm-

mungshalbmesser und ist gleich dem Quadrate der Geschwindigkeit, multiplicirt durch die Krümmung.

[Es ist kaum denkbar, dass dieser wichtige Satz, für den die analytische Geometrie keinen einfachen Beweis liefert, eleganter bewiesen werden könne, als durch das eben gegebene Verfahren.]

338.] Geschieht die Bewegung in einer ebenen Curve, so können wir die Gleichung schreiben wie folgt, um die gebräuchlichen Polarcoordinaten r und ϑ einzuführen:

$$\varrho = r\alpha^{\frac{2\vartheta}{\pi}}\beta,$$

wo α ein Einheits-Vector senkrecht auf der Ebene der Curve ist, β ein Einheits-Vector in jener Ebene.

Man kann r und ϑ ansehen als verbunden durch eine Scalargleichung; oder besser noch, beide können betrachtet werden als Functionen von t. Durch Differentiation erhalten wir

$$\dot{\varrho} = \dot{r}\alpha^{\frac{2\vartheta}{\pi}}\beta + r\dot{\vartheta}\alpha\alpha^{\frac{2\vartheta}{\pi}}\beta,$$

und hieraus folgt unmittelbar, dass $\dot{r}$ die Geschwindigkeit in Richtung des Radius-Vector ist, $r\dot{\vartheta}$ die Geschwindigkeit senkrecht auf denselben. Weiter:

$$\ddot{\varrho} = (\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2)\alpha^{\frac{2\vartheta}{\pi}}\beta + (2\dot{r}\dot{\vartheta} + r\ddot{\vartheta})\alpha\alpha^{\frac{2\vartheta}{\pi}}\beta,$$

und dies liefert die Componenten der Beschleunigung in Richtung des Radius-Vector und senkrecht auf denselben.

339.) Für die *gleichförmige Beschleunigung in constanter Richtung* erhalten wir:

$$\ddot{\varrho} = \alpha.$$

Hieraus

$$\dot{\varrho} = \alpha t + \beta,$$

wo β die Vectorgeschwindigkeit zur Zeit $t = 0$ ist. Dies zeigt, dass der Hodograph eine Gerade ist, die mit gleichbleibender Geschwindigkeit beschrieben wird.

Weiter:

$$\varrho = \frac{\alpha t^2}{2} + \beta t;$$

man hat keine Constante hinzuzufügen, wenn man annimmt, dass zur Zeit $t = 0$ der bewegte Punkt sich im Anfangspunkte befindet.

Da die Componenten von ϱ in Richtung von α und β der ersten und zweiten Potenz von t proportional sind, so ist die Curve eine Parabel (§ 31 (*f*)). Wir können aus der Gleichung folgendes Resultat herleiten:

$$T(\varrho + \tfrac{1}{2}\beta\alpha^{-1}\beta) = -SU\alpha\left(\varrho + \frac{\beta^2}{2}\alpha^{-1}\right),$$

die Gleichung eines Rotationsparaboloids, dessen Achse α ist.

Auch ist $$S.\alpha\beta\varrho = 0,$$
und die Entfernung eines beliebigen Punktes der Bahn von dem Punkte $-\frac{1}{2}\beta\alpha^{-1}\beta$ ist gleich der Entfernung von der Geraden, deren Gleichung ist

$$\varrho = -\frac{\beta^2}{2}\alpha^{-1} + x\alpha\, V\alpha\beta\,.$$

Wir erkennen hierin die Eigenschaft des Brennpunktes und der Directrix.

340.) Soll der sich bewegende Punkt einen Punkt γ erreichen, so muss für einen reellen Werth von t sein:

$$\gamma = \frac{\alpha}{2}t^2 + \beta t.$$

Nehmen wir nun an, $T\beta$, die Anfangsgeschwindigkeit, sei gegeben $= v$, und schreiben wir zur Abkürzung ω statt $U\beta$, dann ist

$$\gamma = \frac{\alpha}{2}t^2 + vt\omega\,.$$

Da $$T\omega = 1,$$

so haben wir $$\frac{T\alpha^2 t^4}{4} - (v^2 - S\alpha\gamma)t^2 + T\gamma^2 = 0.$$

Die Werthe von t^2 sind reell, wenn

$$(v^2 - S\alpha\gamma)^2 - T\alpha^2\, T\gamma^2$$

positiv ist. Da nun $T\alpha\, T\gamma$ nie kleiner ist als $S\alpha\gamma$, so muss $v^2 - S\alpha\gamma$ stets positiv sein, wenn die Wurzeln reell sind. Wenn dieselben reell sind, so sind also beide Werthe von t^2 *positiv*. Wir haben also vier Werthe von t, welche der Bedingung genügen. Man sieht weiter, dass, abgesehen vom Vorzeichen, zwei derselben einander gleich sind; jedes dieser Paare bezieht sich auf dieselbe Bahn, die aber in entgegengesetzter Richtung beschrieben wird, zwischen dem Anfangspunkte und dem Endpunkte von γ. Wenn die Bedingungen überhaupt erfüllt werden können, so gibt es zwei Parabeln, die denselben genügen. Die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit wird gegeben durch den entsprechenden Werth von ω.

341.) Die Umhüllende aller möglichen Bahnen, die einer gegebenen Geschwindigkeit entsprechen, erhält man, indem man setzt:

$$(v^2 - S\alpha\gamma)^2 - T\alpha^2\, T\gamma^2 = 0,$$

denn γ ist hier der Schnittpunkt zweier in derselben Verticalebene gelegener unendlich nahe liegender Bahnen.

Nun ist $$v^2 - S\alpha\gamma = T\alpha\, T\gamma$$

die Gleichung eines Rotationsparaboloids mit dem Anfangspunkte im Brennpunkte, der Achse parallel α und der Leitebene in der Entfernung $\frac{v^2}{T\alpha}$.

Alle die gewöhnlichen Aufgaben, die mit der parabolischen Bewegung zusammenhängen, können mit Hilfe jener Formeln gelöst werden. Einige derselben sind noch leichter zu behandeln, wenn man einen horizontalen Einheits-Vector in der Bewegungsebene einführt, und indem man β durch diesen Vector und durch α ausdrückt. Wir überlassen dies dem Leser.

342.) *Die Beschleunigung sei nach einem festen Punkte gerichtet oder habe die entgegengesetzte Richtung.*

Legen wir den Anfangspunkt in jenen Punkt und setzen wir P für jene Centralbeschleunigung, so ist

$$\ddot{\varrho} = PU\varrho .$$

Hieraus $$V\varrho\ddot{\varrho} = 0 .$$

Integriren wir: $V\varrho\dot{\varrho} = \gamma =$ constanter Vector.

Die Deutung dieser einfachen Formel ist *erstens:* ϱ und $\dot{\varrho}$ liegen in einer Ebene, die auf γ senkrecht steht, die Bahn ist also eben (ihre Ebene geht durch den Anfangspunkt); *zweitens:* der Flächeninhalt des Dreieckes, dass aus ϱ und $\dot{\varrho}$ gebildet wird, ist constant.

[Man kann sich kaum einen einfachern Beweis denken für den Satzt, dass eine Centralbahn eine ebene Curve ist, und dass gleiche Flächenräume durch den Radius-Vector in gleichen Zeiten beschrieben werden.]

343.) *Ist das Gesetz der Beschleunigung nach dem Anfangspunkte oder von demselben weg das Gesetz des umgekehrten Quadrats der Entfernung*, so haben wir:

$$P = \frac{\mu}{T\varrho^2},$$

wo μ *negativ* ist, wenn die Beschleunigung nach dem Anfangspunkte gerichtet ist.

Hieraus: $$\ddot{\varrho} = \frac{\mu U\varrho}{T\varrho^2} .$$

Die folgende Integrationsmethode stammt von Hamilton (man sehe Kapitel IV).

Im allgemeinen ist

$$\frac{dU\varrho}{dt} = -\frac{U\varrho \,.\, V\varrho\dot{\varrho}}{T\varrho^2} = -\frac{U\varrho \,.\, \gamma}{T\varrho^2};$$

hieraus: $$\ddot{\varrho}\gamma = -\mu\frac{dU\varrho}{dt};$$

und $$\dot{\varrho}\gamma = \varepsilon - \mu U\varrho ,$$

wo ε ein constanter Vector ist, senkrecht auf γ, da

$$S\gamma\dot{\varrho} = 0 .$$

In diesem Falle haben wir für den Hodographen

$$\dot{\varrho} = \varepsilon\gamma^{-1} - \mu U\varrho \,.\, \gamma^{-1}.$$

Von den zwei Theilen dieses Ausdrucks, die beide Vectoren sind, ist der erste constant, der zweite von constanter Länge. Der geometrische Ort des Endpunktes von $\dot{\varrho}$ ist also ein Kreis in einer Ebene senkrecht auf γ (d. h. parallel der Bahnebene), dessen Radius $\frac{\mu}{T\gamma}$ ist und dessen Mittelpunkt im Endpunkte des Vectors $\varepsilon\gamma^{-1}$ liegt.

[Diese Gleichung enthält die ganze Theorie des Kreishodographen. Dieselbe ist ausführlich dargestellt in Hamilton's *Elements.*]

344.) Wir können die Gleichung dieses Kreises in der Form schreiben:

$$T(\dot{\varrho} - \varepsilon\gamma^{-1}) = \frac{\mu}{T\gamma},$$

(eine Kugel), und $$S\gamma\dot{\varrho} = 0$$

(eine Ebene, die durch den Anfangspunkt und durch den Mittelpunkt der Kugel geht).

Man findet die Gleichung der Bahn, indem man mit $V.\varrho$ auf die Gleichung des Hodographen operirt. Man erhält auf diese Weise

$$\gamma = V.\varrho\varepsilon\gamma^{-1} + \mu T\varrho.\gamma^{-1},$$

oder $$\gamma^2 = S\varepsilon\varrho + \mu T\varrho,$$

oder $$\mu T\varrho = S\varepsilon(\gamma^2\varepsilon^{-1} - \varrho);$$

in der letzten Gleichung erkennen wir die Eigenschaft des Brennpunktes und der Directrix.

Es ist dies die Gleichung eines Rotationsconicoids, entstanden durch die Drehung um die Hauptachse ε; der Anfangspunkt ist einer der Brennpunkte. Die Bahn erhält man, indem man diese Gleichung mit der Gleichung der Ebene

$$S\gamma\varrho = 0$$

verbindet.

Wir sehen, dass $\gamma^2\varepsilon^{-1}$ die Vectorentfernung der Directrix vom Brennpunkte ist; die Excentricität ist $\frac{T\varepsilon}{\mu}$ und die grosse Achse $\frac{-2\mu\gamma^2}{\mu^2+\varepsilon^2}$.

345.) Wir betrachten den einfachern Fall, *die Beschleunigung sei der Entfernung vom Anfangspunkte proportional.*

Also $$\ddot{\varrho} = \mp m^2\varrho.$$

Es gilt das obere oder das untere Vorzeichen, je nachdem die Beschleunigung von dem Centrum weg oder nach demselben hin gerichtet ist.

Das heisst $$\left(\frac{d^2}{dt^2} \mp m^2\right)\varrho = 0.$$

Hieraus: $$\varrho = \alpha\varepsilon^{mt} + \beta\varepsilon^{-mt};$$

oder $$\varrho = \alpha\cos mt + \beta\sin mt,$$

wo α und β willkürliche, aber constante Vectoren sind, und ε die Basis der Neper'schen Logarithmen ist.

Die erste Gleichung stellt eine Hyperbel dar (§ 31, k), deren Asymptoten die Richtungen α und β haben; die zweite eine Ellipse, die α und β zu conjugirten Durchmessern hat.

Da $$\dot{\varrho} = m\{\alpha\varepsilon^{mt} - \beta\varepsilon^{-mt}\}$$

oder $$= m\{-\alpha \sin mt + \beta \cos mt\},$$

so ist der Hodograph wiederum eine Hyperbel oder eine Ellipse.

Aber im ersten Falle (wenn wir die Aenderung in der Grösse, die der Scalarfactor m anzeigt, vernachlässigen) ist der Hodograph der Bahn conjugirt; im Falle der Ellipse ist er ähnlich und ähnlich gelegen.

346.) *Die Beschleunigung sei der dritten Potenz der Entfernung proportional.*

Wir haben $$\ddot{\varrho} = \frac{\mu U\varrho}{T\varrho^3};$$

und $$V\varrho\dot{\varrho} = \gamma.$$

Operirt man mit $S.\dot{\varrho}$: $$S\dot{\varrho}\ddot{\varrho} = \mu\frac{S\varrho\dot{\varrho}}{T\varrho^4},$$

das Integral hiervon ist: $$\dot{\varrho}^2 = C - \frac{\mu}{\varrho^2},$$

die Gleichung der Energie.

Weiter $$S\dot{\varrho}\ddot{\varrho} = \frac{\mu}{\varrho^2}.$$

Hieraus $$S\dot{\varrho}\ddot{\varrho} + \dot{\varrho}^2 = C$$

oder $$S\varrho\dot{\varrho} = Ct;$$

wir haben keine Constante hinzuzufügen, wenn wir die Zeit von dem Durchgange des Punktes durch eine der Apsiden zählen, da dann

$$S\varrho\dot{\varrho} = 0.$$

Bei einer zweiten Integration erhalten wir

$$\varrho^2 = Ct^2 + C' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

[Um C' zu bestimmen, bemerken wir, dass

$$\varrho\dot{\varrho} = Ct + \gamma,$$

oder $$\varrho^2\dot{\varrho}^2 = C^2t - \gamma^2,$$

aber $$\varrho^2\dot{\varrho}^2 = C\varrho^2 - \mu \text{ (nach der Gleichung der Energie),}$$

$$= C^2t^2 + CC' - \mu \quad \text{nach (1).}$$

Hieraus $$CC' = \mu - \gamma^2.]$$

Um die Lösung zu vervollständigen, haben wir nach § 133

$$V\frac{\dot{\varrho}}{\varrho} = \frac{dU\varrho}{dt}(U\varrho)^{-1} = \frac{d}{dt}\log\frac{U\varrho}{\beta},$$

wo β ein Einheits-Vector in der Ebene der Bahn ist.

Nun ist aber $$V\frac{\dot{\varrho}}{\varrho} = \frac{-\gamma}{\varrho^2}.$$

Hieraus $$\log\frac{U\varrho}{\beta} = -\gamma\int\frac{dt}{Ct^2+C'}.$$

Die Elimination von t zwischen dieser Gleichung und (1) liefert $T\varrho$ ausgedrückt durch $U\varrho$, also die gesuchte Gleichung der Bahn.

Wir bemerken, dass, wenn ϑ der gewöhnliche Polarwinkel in der Bahn ist, dass dann

$$\log\frac{U\varrho}{\beta} = \vartheta U\gamma.$$

Hieraus folgt $$\vartheta = -T\gamma\int\frac{dt}{Ct^2+C'}$$

und $$r^2 = -(Ct^2+C'),$$

und hieraus kann die gewöhnliche Gleichung von Cotes' Spirale hergeleitet werden.

[Man sehe Tait und Steele's *Dynamics of a Particle*, dritte Auflage, Appendix (A).]

347.) *Die Bedingungen aufzustellen dafür, dass eine gegebene Curve der Hodograph einer Centralbahn sei.*

Ist ω der Vector der Curve, *gegeben als Function der Zeit*, dann ist $\int\omega dt$ der Vector der Bahn. Die gesuchten Bedingungen werden also ausgesprochen durch

$$V\omega\int\omega dt = \gamma,$$

wo γ ein constanter Vector ist.

Wir können dies auf andere Formen bringen, die den Cartesischen Gleichungen ähnlicher sind:

$$V\dot{\omega}\int\omega dt = 0,$$

und $$V\ddot{\omega}\int\omega dt + V\dot{\omega}\omega = 0.$$

Aus der ersten $$\int\omega dt = x\dot{\omega},$$

und deshalb $$xV\omega\omega = \gamma,$$

oder die Curve ist *eben*,

und $$xV\ddot{\omega}\dot{\omega} + V\omega\omega = 0;$$

eliminirt man x: $$\gamma V\dot{\omega}\ddot{\omega} = -(V\omega\dot{\omega})^2.$$

Ist nun v' die Geschwindigkeit in dem Hodographen, R' dessen Krümmungsradius, p' die Senkrechte auf der Tangente, so liefert diese Gleichung

$$hv' = R'p'^2,$$

und dies ist in Uebereinstimmung mit bekannten Resultaten.

348.) Die Gleichung einer Epitrochoide oder Hypotrochoide, auf den Mittelpunkt des festen Kreises bezogen, ist

$$\varrho = a i^{\frac{2\omega t}{\pi}} \alpha + b i^{\frac{2\omega_1 t}{\pi}} \alpha,$$

wo α ein Einheits-Vector in der Ebene der Curve ist, und i ein anderer senkrecht auf derselben. ω und ω_1 sind die Winkelgeschwindigkeiten in den beiden Kreisen, und t ist die Zeit, die verflossen ist, seit der beschreibende Punkt und die Mittelpunkte der beiden Kreise in einer Geraden waren.

Die Länge des Bogens einer solchen Curve ist

$$s = \int T\dot{\varrho}\,dt = \int dt \sqrt{\{\omega^2 a^2 + 2\omega\omega_1 ab \cos(\omega - \omega_1)t + \omega_1{}^2 b^2\}}$$

$$= \int dt \sqrt{\left\{(\omega a \mp \omega_1 b)^2 \pm 4\omega\omega_1 ab \left| \begin{matrix}\cos^2 \\ \sin^2\end{matrix}\right| \frac{\omega - \omega_1}{2} t\right\}},$$

dies ist eine elliptische Function.

Wird die Curve zu einer Epicycloide oder Hypocycloide, dann ist

$$\omega a \mp \omega_1 b = 0$$

und

$$s = \sqrt{(\pm \omega\omega_1 ab)} \int dt \left\{ \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\right\} \frac{\omega - \omega_1}{2} t;$$

dies kann durch einen geschlossenen Ausdruck dargestellt werden, wie Newton zuerst in den *Principia* gezeigt.

Der Hodograph ist eine andere Curve derselben Art, deren Gleichung ist

$$\dot{\varrho} = i(a\omega i^{\frac{2\omega t}{\pi}} \alpha + b\omega_1 i^{\frac{2\omega_1 t}{\pi}} \alpha);$$

die Beschleunigung wird der Grösse und Richtung nach gegeben durch den Vector

$$\ddot{\varrho} = -a\omega^2 i^{\frac{2\omega t}{\pi}} \alpha - b\omega_1{}^2 i^{\frac{2\omega_1 t}{\pi}} \alpha.$$

Die Gleichung der gewöhnlichen Cycloide und Trochoide kann man hieraus herleiten, indem man a unendlich gross, ω unendlich klein werden lässt, doch so, dass das Product $a\omega$ endlich bleibt; der Anfangspunkt wird dabei nach dem Punkte $\varrho = a\alpha$ verlegt.

349.) Es sei i die Vectornormale einer beliebigen Ebene.

Es seien ϖ und ϱ Vectoren von zwei beliebigen Punkten in einer starren Platte, welche in Berührung steht mit jener Ebene.

Nach einer kleinen Verschiebung der Platte in ihrer Ebene seien $d\varpi$ und $d\varrho$ die Incremente von ϖ und ϱ. Dann ist

$$Sid\varpi = 0, \qquad Sid\varrho = 0;$$

und da $T(\varpi - \varrho)$ constant ist,

$$S(\varpi - \varrho)(d\varpi - d\varrho) = 0.$$

Wir können annehmen:

$$d\varrho = \omega i(\varrho - \tau),$$
$$d\varpi = \omega i(\varpi - \tau);$$

τ ist der Vector eines Punktes in der Ebene, und die Verschiebung ist einer Drehung um jenen Punkt äquivalent.

Eliminiren wir τ, so folgt

$$\omega i = \frac{d(\varpi - \varrho)}{\varpi - \varrho},$$

dies liefert ω und damit ist auch τ gegeben.

Für einen beliebigen andern Punkt σ in der Ebene ist:

$$Sid\sigma = 0,$$

$S(\varrho - \sigma)(d\varrho - d\sigma) = 0.$ Hieraus $d\varrho - d\sigma = \omega_1 i(\varrho - \sigma).$

$S(\sigma - \varpi)(d\sigma - d\varpi) = 0.$ Hieraus $d\sigma - d\varpi = \omega_2 i(\sigma - \varpi).$

Hieraus folgt: $\omega_1 = \omega_2 = \omega$

und $d\sigma = \omega i(\sigma - \tau),$

d. h. auch die Verschiebung dieses Punktes ist äquivalent einer Drehung ω um eine Achse, die durch den Endpunkt von τ geht und i parallel ist.

350.) Wir betrachten den Fall eines starren Körpers, der sich um einen festen Punkt bewegt. Es seien ϖ, ϱ, σ Vectoren von drei beliebigen Punkten des Körpers; der Anfangspunkt sei der feste Punkt.

ϖ^2, ϱ^2, σ^2 sind dann constant, ebenso wie $S\varpi\varrho$, $S\varrho\sigma$ und $S\sigma\varpi$.

Nach einer beliebigen Verschiebung haben wir für ϖ und ϱ:

$$\left.\begin{aligned} S\varpi d\varpi &= 0 \\ S\varrho d\varrho &= 0 \\ S\varpi d\varrho + S\varrho d\varpi &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Diesen drei Gleichungen wird genügt durch

$$d\varpi = V\alpha\varpi, \qquad d\varrho = V\alpha\varrho,$$

wo α ein beliebiger Vector ist.

Sind aber $d\varpi$ und $d\varrho$ gegeben, dann ist

$$Vd\varpi d\varrho = V.V\alpha\varpi V\alpha\varrho = \alpha S.\alpha\varrho\varpi.$$

Operirt man hierauf mit $S.V\varpi\varrho$ und berücksichtigt (1), so folgt

$$S^2\varpi d\varrho = S^2\varrho d\varpi = S^2.\alpha\varrho\varpi.$$

Hieraus $$\alpha = \frac{Vd\varpi d\varrho}{S\varpi d\varrho} = \frac{Vd\varrho d\varpi}{S\varrho d\varpi} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Betrachten wir jetzt σ:

$$\left.\begin{aligned} S\sigma d\sigma &= 0, \\ S\varrho d\sigma &= -S\sigma d\varrho, \\ S\varpi d\sigma &= -S\sigma d\varpi. \end{aligned}\right\};$$

$d\sigma = V\alpha\sigma$ genügt allen diesen Gleichungen in Folge von (2) und

wir erhalten so den Satz: *Jede unendlich kleine Verschiebung eines starren Körpers um einen festen Punkt ist einer Drehung äquivalent.*

351.) *Darzustellen die Drehung eines starren Körpers um eine gegebene Achse und um einen gegebenen endlichen Winkel.*

Es sei α ein Einheits-Vector in Richtung der Achse, ϱ der Vector eines beliebigen Punktes des Körpers in Bezug auf einen festen Punkt in der Achse und ϑ der Drehungswinkel.

Dann ist:
$$\varrho = \alpha^{-1} S\alpha\varrho + \alpha^{-1} V\alpha\varrho$$
$$= -\alpha S\alpha\varrho - \alpha V\alpha\varrho.$$

Durch die Drehung wird der erste Theil nicht verändert, der zweite aber wird

oder
$$-\alpha^{\frac{2\vartheta}{\pi}} \alpha V\alpha\varrho$$
$$-\alpha V\alpha\varrho \cos\vartheta + V\alpha\varrho \sin\vartheta.$$

ϱ wird also:
$$\varrho_1 = -\alpha S\alpha\varrho - \alpha V\alpha\varrho \cos\vartheta + V\alpha\varrho \sin\vartheta$$
$$= \left(\cos\frac{\vartheta}{2} + \alpha \sin\frac{\vartheta}{2}\right)\varrho\left(\cos\frac{\vartheta}{2} - \alpha \sin\frac{\vartheta}{2}\right)$$
$$= \alpha^{\frac{\vartheta}{\pi}} \varrho\, \alpha^{-\frac{\vartheta}{\pi}}.$$

352.) *Um zwei Drehungen, um sich schneidende Achsen, zusammen zu setzen*, können wir schreiben für die Wirkung einer weitern Drehung φ um den Einheits-Vector β:
$$\varrho_2 = \beta^{\frac{\varphi}{\pi}} \varrho_1 \beta^{-\frac{\varphi}{\pi}}.$$

Hieraus:
$$\varrho_2 = \beta^{\frac{\varphi}{\pi}} \alpha^{\frac{\vartheta}{\pi}} \varrho\, \alpha^{-\frac{\vartheta}{\pi}} \beta^{-\frac{\varphi}{\pi}}.$$

Hätte zuerst die Drehung um β, dann die Drehung um α stattgefunden, so hätten wir
$$\varrho'_2 = \alpha^{\frac{\vartheta}{\pi}} \beta^{\frac{\varphi}{\pi}} \varrho\, \beta^{-\frac{\varphi}{\pi}} \alpha^{-\frac{\vartheta}{\pi}},$$
und da die Quaternionenmultiplication nicht commutativ ist, so hat man im allgemeinen *nicht*
$$\varrho'_2 = \varrho_2.$$

Sind α, β, γ Halbmesser der Einheits-Kugel, die nach den Eckpunkten eines sphärischen Dreiecks führen, dessen Winkel sind $\frac{\vartheta}{2}$, $\frac{\varphi}{2}$, $\frac{\psi}{2}$, so wissen wir, dass
$$\gamma^{\frac{\psi}{\pi}} \beta^{\frac{\varphi}{\pi}} \alpha^{\frac{\vartheta}{\pi}} = -1 \text{ (Hamilton, Lectures p. 267).}$$

Hieraus
$$\beta^{\frac{\varphi}{\pi}} \alpha^{\frac{\vartheta}{\pi}} = -\gamma^{-\frac{\psi}{\pi}}$$

und wir können schreiben

$$\varrho_2 = \gamma^{-\frac{\psi}{\pi}} \varrho \gamma^{\frac{\psi}{\pi}}.$$

Das heisst, *die aufeinander folgenden Drehungen um Radien, welche nach zwei Ecken des sphärischen Dreiecks führen, und um die doppelten Winkel jenes Dreiecks, sind äquivalent einer einzigen Drehung um den Radius, der nach der dritten Ecke führt, und um den doppelten äussern Winkel des Dreiecks.*

Auf diese Weise kann eine beliebige Anzahl von aufeinander folgenden *endlichen* Drehungen eines Systems, das einen festen Punkt besitzt, ersetzt werden durch eine einzige Drehung um eine bestimmte Achse.

353.) Sind die Drehungen unendlich klein, so ist die Wirkung einer derselben nach § 351

$$\varrho_1 = \varrho + \mathfrak{a} V\alpha\varrho,$$

für zwei Drehungen erhält man, wenn man das Product von unendlich kleinen Grössen vernachlässigt,

$$\varrho_2 = \varrho + \mathfrak{a} V\alpha\varrho + \mathfrak{b} V\beta\varrho,$$

wo $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die Drehungswinkel um die Einheits-Achsen α und β darstellen.

Dies ist gleichbedeutend mit

$$\varrho_2 = \varrho + T(\mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{b}\beta) V U(\mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{b}\beta)\varrho,$$

und dies stellt eine Drehung um den Winkel $T(\mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{b}\beta)$ um den Einheits-Vector $U(\mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{b}\beta)\varrho$ dar.

Letzterer ist nun die *Richtung*, ersterer die *Länge* der Diagonalen des Parallelogramms, dessen Seiten $\mathfrak{a}\alpha$ und $\mathfrak{b}\beta$ sind.

Diese Resultate lassen sich einfacher schreiben, wenn wir setzen β statt $\mathfrak{b}\beta$ und α statt $\mathfrak{a}\alpha$; α und β sind jetzt keine Einheits-Vectoren mehr, sondern stellen durch ihre Versoren die *Achsen* und durch ihre Tensoren die kleinen *Winkel* der Drehung dar.

Wir erhalten:

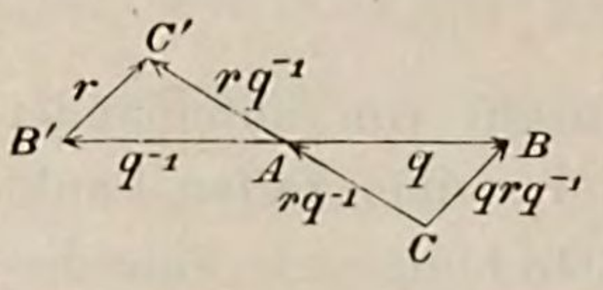
$$\begin{aligned} \varrho_1 &= \varrho + V\alpha\varrho, \\ \varrho_2 &= \varrho + V\alpha\varrho + V\beta\varrho, \\ &= \varrho + V(\alpha+\beta)\varrho. \end{aligned}$$

354.) Der allgemeine Satz, von dem die obigen Paragraphen nur einige specielle Fälle illustriren, lautet: Durch eine Drehung um die Achse von q, um den doppelten Winkel von q, wird die Quaternion r zu qrq^{-1}. Ihr Tensor und ihr Winkel bleiben unverändert, ihre Ebene oder Achse allein wird eine andere.

Ein Blick auf die Figur genügt, dies zu beweisen, wenn wir berücksichtigen, dass $T.qrq^{-1} = Tr$, und dass wir also nur die

Versortheile in Betracht zu ziehen haben. Es sei Q der Pol von q,

$$\widehat{AB} = q, \qquad \widehat{AB'} = q^{-1}, \quad \widehat{B'C'} = r.$$



Man verbinde $C'A$ und nehme $\widehat{AC} = \widehat{C'A}$.
Man verbinde CB.

Dann ist $\widehat{CB}$ gleich qrq^{-1}, sein Bogen CB ist offenbar der Länge nach gleich dem Bogen von r, $B'C'$; die Ebene des Versors schliesst mit BB' denselben Winkel ein, wie auch $B'C'$ und ist in diese Lage gelangt durch eine Drehung um Q, dem Pole von q, durch den doppelten Winkel von q.

Ist r ein Vector, $= \varrho$, dann ist $q\varrho q^{-1}$ (ebenfalls ein Vector) das Resultat der Drehung um den doppelten Winkel von q um die Achse von q. Bezeichnen wir, wie Hamilton, mit B einen starren Körper, oder ein System von Vectoren, dann ist

$$qBq^{-1}$$

dessen neue Lage nach einer Drehung um den doppelten Winkel von q um die Achse von q.

355.) Um derartige Drehungen zusammenzusetzen, haben wir

$$r \,.\, qBq^{-1} \,.\, r^{-1} = rq \,.\, B \,.\, (rq)^{-1}.$$

Um eine Drehung hervorzubringen, deren Betrag gleich ist t-mal dem doppelten Winkel von q, schreiben wir

$$q^t Bq^{-t},$$

um die Richtung dieser Drehung umzukehren, schreibe man

$$q^{-t} Bq^t.$$

Um den Körper ohne Drehung zu *verschieben*, wo also jeder Punkt den Vector α beschreibt, hat man zu setzen

$$\alpha + B.$$

Um den so verschobenen Körper zu drehen um dieselbe Achse und um denselben Winkel wie oben:

$$q(\alpha + B)q^{-1}.$$

Hätte erst die Drehung und dann die Verschiebung stattgefunden, so hätten wir

$$\alpha + qBq^{-1}.$$

Die auffallende Verschiedenheit dieser Resultate mag vielleicht denen von Nutzen sein, welche nicht an die Drehung des Mondes glauben; solchen Leuten sind aber Quaternionen unverständlich.

356.) *Die momentane Achse sei als Function der Zeit gegeben; man soll die Drehung angeben, welche den Körper von einer beliebigen Anfangslage in die Lage zu einer gegebenen Zeit überführt.*

Ist α der Anfangs-Vector eines Punktes des Körpers, ϖ der Werth desselben zur Zeit t, und q die gesuchte Quaternion, so haben wir

$$\varpi = q\alpha q^{-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Differentiirt man in Bezug auf t, so folgt:

$$\begin{aligned}\dot{\varpi} &= \dot{q}\alpha q^{-1} - q\alpha q^{-1}\dot{q}q^{-1} \\ &= \dot{q}q^{-1}.q\alpha q^{-1} - q\alpha q^{-1}.\dot{q}q^{-1} \\ &= 2V(V\dot{q}q^{-1}.q\alpha q^{-1}).\end{aligned}$$

Nun ist $\dot{\varpi} = V\varepsilon\varpi = V.\varepsilon q\alpha q^{-1}$.

Da nun $q\alpha q^{-1}$ ein beliebiger Vector in dem verschobenen Körper sein kann, so muss sein:

$$\varepsilon = 2V\dot{q}q^{-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Wir können dies auf eine noch einfachere Form bringen; wir haben stets, welche Quaternion auch q sein möge,

$$V\dot{q}q^{-1} = \frac{dUq}{dt}(Uq)^{-1}.$$

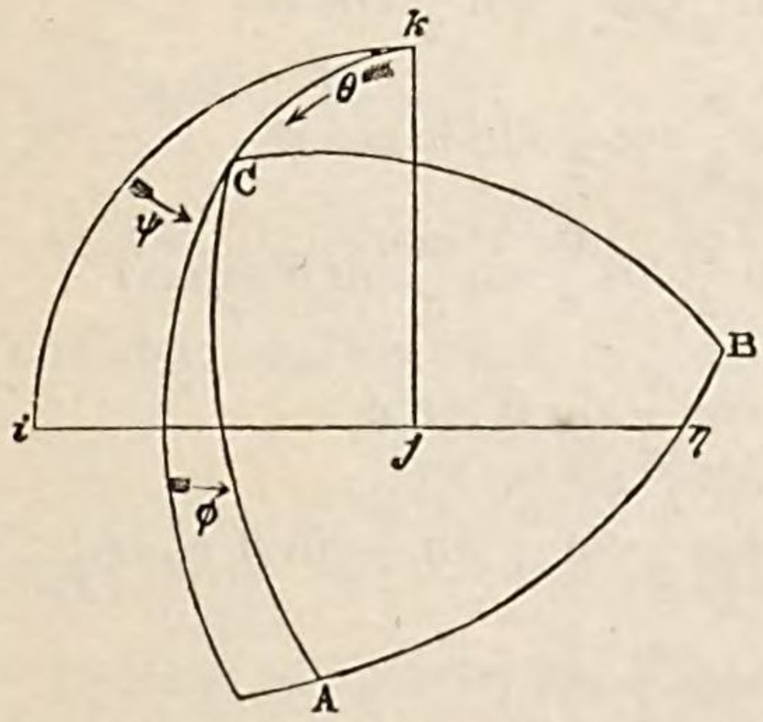
Nehmen wir nun an, der Tensor von q, der einen beliebigen Werth haben kann, sei constant (z. B. gleich Eins), so können wir (2) die Form geben

$$\varepsilon q = 2\dot{q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Eine unmittelbare Folge, die uns später von Nutzen sein wird, ist

$$q.q^{-1}\varepsilon q = 2\dot{q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

357.) *q auszudrücken durch die gebräuchlichen Winkel ψ, ϑ, φ.*



Die Vectoren i, j, k in der Anfangslage des Körpers entsprechen $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, zur Zeit t.

Der Uebergang von der einen Lage in die andere geschieht *erstens* durch eine Drehung ψ um k; *zweitens* eine Drehung ϑ um die Gerade, die ursprünglich mit j zusammenfiel; *drittens* eine Drehung φ um die Gerade, die anfangs mit k zusammenfiel, in ihrer Endlage.

Die Drehung ψ um k hat den Operator:

$$k^{\frac{\psi}{\pi}}\ (\quad)\ k^{-\frac{\psi}{\pi}},$$

dies führt j in η über, wo

$$\eta = k^{\frac{\psi}{\pi}} j k^{-\frac{\psi}{\pi}} = j\cos\psi - i\sin\psi\,.$$

Der Körper dreht sich dann um η um den Winkel ϑ. Dies hat den Operator

$$\eta^{\frac{\vartheta}{\pi}}\ (\quad)\ \eta^{-\frac{\vartheta}{\pi}};$$

es führt k in $\overline{OC}$ über:

$$\overline{OC} = \zeta = \eta^{\frac{\vartheta}{\pi}} k \eta^{-\frac{\vartheta}{\pi}} = \left(\cos\frac{\vartheta}{2} + \eta\sin\frac{\vartheta}{2}\right)^k \left(\cos\frac{\vartheta}{2} - \eta\sin\frac{\vartheta}{2}\right)$$
$$= k\cos\vartheta + \sin\vartheta(i\cos\psi + j\sin\psi).$$

Nun dreht sich der Körper um den Winkel φ um ϱ, der Operator ist

$$\zeta^{\frac{\varphi}{\pi}}\ (\quad)\ \zeta^{-\frac{\varphi}{\pi}}.$$

Hieraus:

$$q = \zeta^{\frac{\varphi}{\pi}} \eta^{\frac{\vartheta}{\pi}} k^{\frac{\psi}{\pi}}$$
$$= \left(\cos\frac{\varphi}{2} + \zeta\sin\frac{\varphi}{2}\right)\left(\cos\frac{\vartheta}{2} + \eta\sin\frac{\vartheta}{2}\right)\left(\cos\frac{\psi}{2} + k\sin\frac{\psi}{2}\right)$$
$$= \left(\cos\frac{\varphi}{2} + \zeta\sin\frac{\varphi}{2}\right)\Big[\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\psi}{2} + k\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\psi}{2}$$
$$+ \sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\psi}{2}(j\cos\psi - i\sin\psi) + \sin\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\psi}{2}(i\cos\psi + j\sin\psi)\Big]$$
$$= \left(\cos\frac{\varphi}{2} + \zeta\sin\frac{\varphi}{2}\right)\Big[\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\psi}{2} - i\sin\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\psi}{2} + j\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\psi}{2}$$
$$+ k\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\psi}{2}\Big]$$
$$= \cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\psi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\psi}{2}\sin\vartheta\cos\psi$$
$$- \sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\psi}{2}\sin\vartheta\sin\psi - \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\psi}{2}\cos\vartheta$$
$$+ i\Big(-\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\psi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\psi}{2}\sin\vartheta\cos\psi$$
$$- \sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\psi}{2}\cos\vartheta + \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\psi}{2}\sin\vartheta\sin\psi\Big)$$
$$+ j\Big(\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\psi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\psi}{2}\sin\vartheta\sin\psi$$
$$- \sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\psi}{2}\cos\vartheta - \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\psi}{2}\sin\vartheta\cos\psi\Big)$$
$$+ k\Big(\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\psi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\psi}{2}\cos\vartheta$$
$$+ \sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\psi}{2}\sin\vartheta\sin\psi + \sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\psi}{2}\sin\vartheta\cos\varphi\Big)$$
$$= \cos\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\vartheta}{2} + i\sin\frac{\varphi-\psi}{2}\sin\frac{\vartheta}{2} + j\cos\frac{\varphi-\psi}{2}\sin\frac{\vartheta}{2} + k\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}$$

und dies ist natürlich ganz unsymmetrisch.

358.) *Die gewöhnlichen Gleichungen aufzustellen, die ψ, ϑ, φ verbinden mit den Winkelgeschwindigkeiten um drei, in dem Körper festliegende rechtwinklige Achsen.*

Da wir in dem vorigen Paragraphen den Werth von q durch jene drei Winkel ausgedrückt haben, so mag es von Nutzen sein, denselben anzuwenden in Verbindung mit Gleichung (3) § 356, zum Theil als Verification jener Gleichung. Es ist dies allerdings ein sehr umständliches Verfahren und entspricht nicht dem einfachen Wege, den die Quaternionen unmittelbar liefern.

Wir haben

$$2\dot{q} = \varepsilon q = \{\omega_1 \overline{OA} + \omega_2 \overline{OB} + \omega_3 \overline{OC}\}\, q,$$

hieraus $$2q^{-1}\dot{q} = q^{-1}\{\omega_1 \overline{OA} + \omega_1 \overline{OB} + \omega_3 \overline{OC}\}\, q$$

oder $$2\dot{q} = (i\omega_1 + j\omega_2 + k\omega_3).$$

Dies zerfällt in die vier Gleichungen, die drei unabhängigen Gleichungen äquivalent sind:

$$2\frac{d}{dt}\left(\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\right)$$

$$= -\omega_1 \sin\frac{\varphi-\psi}{2}\sin\frac{\vartheta}{2} - \omega_2\cos\frac{\varphi-\psi}{2}\sin\frac{\vartheta}{2} - \omega_3 \sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\vartheta}{2},$$

$$2\frac{d}{dt}\left(\sin\frac{\varphi-\psi}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\right)$$

$$= \omega_1\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\vartheta}{2} - \omega_2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\vartheta}{2} + \omega_3\cos\frac{\varphi-\psi}{2}\sin\frac{\vartheta}{2},$$

$$2\frac{d}{dt}\left(\cos\frac{\varphi-\psi}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\right)$$

$$= \omega_1\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\vartheta}{2} + \omega_2\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\vartheta}{2} - \omega_3\sin\frac{\varphi-\psi}{2}\sin\frac{\vartheta}{2},$$

$$2\frac{d}{dt}\left(\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\right)$$

$$= -\omega_1\cos\frac{\varphi-\psi}{2}\sin\frac{\vartheta}{2} + \omega_2\sin\frac{\varphi-\psi}{2}\sin\frac{\vartheta}{2} + \omega_3\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}.$$

Aus der zweiten und dritten eliminire man $\dot{\varphi} - \dot{\psi}$, es folgt

$$\cos\frac{\vartheta}{2}\cdot\dot{\vartheta} = (\omega_1\sin\varphi + \omega_2\cos\varphi)\cos\frac{\vartheta}{2}$$

oder $$\dot{\vartheta} = \omega_1\sin\varphi + \omega_2\cos\varphi. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Dem entsprechend, indem man $\dot{\vartheta}$ aus denselben beiden Gleichungen eliminirt:

$$\sin\frac{\vartheta}{2}(\dot{\varphi} - \dot{\psi}) = \omega_3\sin\frac{\vartheta}{2} + \omega_1\cos\varphi\cos\frac{\vartheta}{2} - \omega_2\sin\varphi\cos\frac{\vartheta}{2}.$$

Und aus der ersten und letzten der obigen vier Gleichungen:

$$\cos\frac{\vartheta}{2}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}) = \omega_3\cos\frac{\vartheta}{2} - \omega_1\cos\varphi\sin\frac{\vartheta}{2} + \omega_2\sin\varphi\sin\frac{\vartheta}{2}.$$

Diese beiden letzten Gleichungen liefern

$$\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta = \omega_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi} = (-\omega_1\cos\varphi + \omega_2\sin\varphi)\sin\vartheta + \omega_3\cos\vartheta\,.$$

Aus diesen beiden

$$\dot{\psi}\sin\vartheta = -\omega_1\cos\varphi + \omega_2\sin\varphi \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

(1) (2) (3) sind die Formen, in welchen die Gleichungen gewöhnlich gegeben werden.

359.) *Ausdrücke herzuleiten für die Richtungscosinus eines Systems rechtwinkliger Achsen in einer beliebigen Lage, in Form rationaler Functionen von nur drei Grössen.*

Es seien α, β, γ Einheits-Vectoren in Richtung der Achsen. Es sei, wie in § 356, q der Quaternionenoperator, der die Coordinatenachsen in jenes rechtwinklige System überführt. Dann haben wir

$$q = w + xi + yz + xk\,.$$

und wie in § 356 können wir setzen

$$1 = w^2 + x^2 + y^2 + z^2\,.$$

Wir haben dann $q^{-1} = w - xi - yj - zk$

und deshalb

$$\alpha = qiq^{-1} = (wi - x - yk + zj)(w - xi - yj - zk)$$
$$= (w^2 + x^2 - y^2 - z^2)\,i + 2(wz + xy)j + 2(xz - wy)k,$$

wo die Coefficienten von i, j, k die gesuchten Richtungscosinus von α sind. Ein ähnliches Verfahren liefert β und γ.

Cayley*) gibt denselben nach Rodrigues eine etwas andere, weniger einfache Form; man kann die obigen Ausdrücke auf jene Form bringen, indem man setzt:

$$w = \frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\mu} = \frac{z}{\nu} = \frac{1}{\varkappa^{\frac{1}{2}}}.$$

Die geometrische Deutung folgt aus der Natur der Quaternionen. Denn ist (in Cayley's Bezeichnungsweise) ϑ der Drehungswinkel und sind $\cos f$, $\cos g$, $\cos h$ die Richtungscosinus der Achse, so haben wir

$$q = w + xi + yj + zk = \cos\frac{\vartheta}{2} + \sin\frac{\vartheta}{2}(i\cos f + j\cos g + k\cos h),$$

so dass

$$w = \cos\frac{\vartheta}{2}$$
$$x = \sin\frac{\vartheta}{2}\cos f$$
$$y = \sin\frac{\vartheta}{2}\cos g$$
$$z = \sin\frac{\vartheta}{2}\cos h\,.$$

*) Camb. and Dub. Math. Journal. Vol. I (1846).

Von diesen gehen wir über zu Rodrigues' Formeln:

$$\varkappa = \frac{1}{w^2} = \sec^2 \frac{\vartheta}{2},$$

$$\lambda = \frac{x}{w} = \tan \frac{\vartheta}{2} \cos f,$$

u. s. w. = u. s. w.

360.) Aus der Definition der *homogenen Deformation* folgt, dass, wenn wir drei beliebige, nichtcomplanare Einheits-Vectoren α, β, γ in dem Körper wählen, diese nach der Deformation in andere Vectoren α_1, β_1, γ_1 übergehen, die aber nicht nothwendiger Weise Einheits-Vectoren sind.

Jeder andere *gegebene* Vector, den man wie folgt ausdrücken kann:

$$\varrho = x\alpha + y\beta + z\gamma,$$

wird

$$\varrho_1 = x\alpha_1 + y\beta_1 + z\gamma_1$$

und ist also bekannt, wenn α_1, β_1, γ_1 gegeben sind.

Genauer ausgedrückt:

$$\varrho S.\alpha\beta\gamma = \alpha S.\beta\gamma\varrho + \beta S.\gamma\alpha\varrho + \gamma S.\alpha\beta\varrho$$

und $\varrho_1 S.\alpha\beta\gamma = \varphi\varrho S.\alpha\beta\gamma = \alpha_1 S.\beta\gamma\varrho + \beta_1 S.\gamma\alpha\varrho + \gamma S.\alpha\beta\varrho.$

Die Eigenschaften von φ, die in Kapitel V dargelegt wurden, erlauben uns mit grosser Einfachheit Deformationen und Verschiebungen in festen Körpern und Flüssigkeiten zu studieren.

Z. B. *Den Vector aufzusuchen, dessen Richtung durch die Deformation nicht geändert wird*, heisst die Gleichung lösen

$$V\varrho\varphi\varrho = 0 \quad \text{oder} \quad \varphi\varrho = g\varrho,$$

wo g eine Scalarunbekannte ist.

[Diese Vectorgleichung ist *drei* Scalargleichungen äquivalent und enthält nur *drei* unbekannte Grössen. Nämlich *zwei* für die Richtung von ϱ (der Tensor kömmt nicht vor, oder ist vielmehr ein Factor auf beiden Seiten) und die Unbekannte g.]

Wir sahen, dass jede derartige Gleichung auf eine cubische Gleichung in g führt, die man schreiben kann

$$g^3 - m_2 g^2 + m_1 g - m = 0,$$

wo m_2, m_1, m Scalaren sind, die in bekannter Weise von den constanten Vectoren abhängen, die in φ vorkommen. Dies muss *eine* reelle Wurzel haben, und kann deren drei haben.

361.) *Die Bedingungen aufzustellen dafür, dass die Vectorgleichung*

$$V\varrho\varphi\varrho = 0$$

drei reelle Wurzeln habe, d. h. dass nach einer gegebenen Deformation drei Gerade in dem Körper ihre Richtung unverändert beibehalten.

Es sei $\varphi = \varpi + V.\varepsilon$, wo ϖ selbstconjugirt ist.

Die gegebene Gleichung kann dann geschrieben werden

$$\varpi\varrho + V\varepsilon\varrho = g\varrho.$$

Hieraus folgt für jedes α

$$S.\varrho\{(\varpi - g)\alpha + V\alpha\varepsilon\} = 0.$$

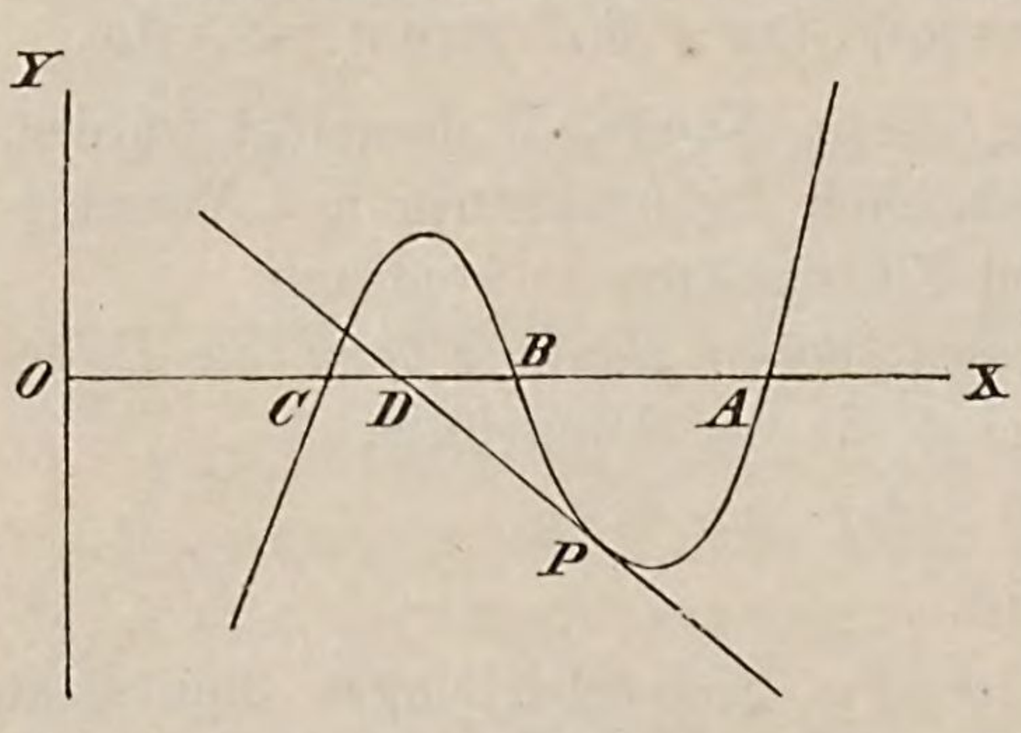
Es seien α, β, γ die Haupteinheits-Vectoren der reinen Deformation ϖ und a, b, c (in absteigender Grössenordnung) die entsprechenden Scalaren. Die Gleichung für x wird dann

$$S.((a-g)\alpha + V\alpha\varepsilon)((b-g)\beta + V\beta\varepsilon)((c-g)\gamma + V\gamma\varepsilon) = 0$$

oder $$(g-a)(g-b)(g-c) - \varepsilon^2(g + S.U\varepsilon\varpi U\varepsilon) = 0.$$

Die Aufgabe ist also darauf zurückgeführt, den Grenzwerth von $T\varepsilon$ zu finden für jeden gegebenen Werth von $U\varepsilon$, so dass die obige Gleichung lauter reelle Wurzeln habe. Die gewöhnlichen Methoden führen auf eine cubische Gleichung in $T\varepsilon^2$, aber der Ausdruck ist ziemlich verwickelt. Der Abwechselung wegen wollen wir eine graphische Methode wählen.

Die äussersten Werthe von $-SU\varepsilon\varpi U\varepsilon$ sind a, b, c.



Die Curve soll die Gleichung

$$y = (x-a)(x-b)(x-c)$$

darstellen. OD sei irgend ein gegebener Werth von $-SU\varepsilon\varpi U\varepsilon$. D muss auf der endlichen Geraden AC liegen. Von D aus lege man eine Tangente an die Curve. Man nehme nun mit der Figur eine einfache Schiebung vor parallel der Y-Achse, so dass diese Tangente mit der X-Achse zusammenfalle. Die Gleichung der Curve nach der Schiebung wird

$$y = (x-a)(y-b)(z-c) + \operatorname{tang} PDA(x - OD)$$

und die Curve wird die X-Achse berühren. Vergleichen wir dies mit der Gleichung oben, so sehen wir, dass wir für den gesuchten Maximalwerth haben

$$T^2\varepsilon = \operatorname{tang} PDA.$$

Das absolute Maximum von $T\varepsilon$ tritt ein, wenn der Berührungspunkt der Inflexionspunkt der Curve ist (die Abscisse desselben ist $\frac{a+b+c}{3}$); der geringste Werth tritt auf, wenn D mit C oder A zusammenfällt. Diese Werthe sind

$$\frac{a-c}{2}\sqrt{1+\tfrac{1}{3}\left(\frac{a-2b-c}{a-c}\right)^2}, \quad \frac{a-b}{2} \text{ und } \frac{b-c}{2}.$$ *)

Der Einfachheit wegen wollen wir annehmen, dass α, β, γ ein rechtwinkliges System darstellen. Wir können dann mit $S.\alpha$, $S.\beta$, $S.\gamma$ operiren und so die Gleichung für g in der Form erhalten:

$$\begin{vmatrix} S\alpha\alpha_1+g & S\alpha\beta_1 & S\alpha\gamma_1 \\ S\beta\alpha_1 & S\beta\beta_1+g & S\beta\gamma_1 \\ S\gamma\alpha_1 & S\gamma\beta_1 & S\gamma\gamma_1+g \end{vmatrix} = 0 \ldots\ldots (1)$$

Um dies zu reduciren, haben wir

$$\begin{vmatrix} S\alpha\alpha_1 & S\alpha\beta_1 & S\alpha\gamma_1 \\ S\beta\alpha_1 & S\beta\beta_1 & S\beta\gamma_1 \\ S\gamma\alpha_1 & S\gamma\beta_1 & S\gamma\gamma_1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{S\alpha\alpha_1}\begin{vmatrix} S^2\alpha\alpha_1+S^2\beta\alpha_1+S^2\gamma\alpha_1, & \Sigma S\alpha\alpha_1 S\alpha\beta_1, & \Sigma S\alpha\alpha_1 S\alpha\gamma_1 \\ S\beta\alpha_1 & S\beta\beta_1 & S\beta\gamma_1 \\ S\gamma\alpha_1 & S\gamma\beta_1 & S\gamma\gamma_1 \end{vmatrix}.$$

Ist die Masse starr, so wird dies

$$\frac{1}{S\alpha\alpha_1}\begin{vmatrix} S\beta\beta_1 & S\beta\gamma_1 \\ S\gamma\beta_1 & S\gamma\gamma_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{S\alpha\alpha_1} S\beta(\beta_1 S\gamma\gamma_1 - \gamma_1 S\gamma\beta_1)$$

$$= \frac{1}{S\alpha\alpha_1} S.\beta V\gamma V\gamma_1\beta_1 = -1.$$

Obige Gleichung wird also

$$-1-g(S\alpha\alpha_1+S\beta\beta_1+S\gamma\gamma_1)+g^2(S\alpha\alpha_1+S\beta\beta_1+S\gamma\gamma_1)+g^3=0$$

oder $$(g-1)(g^2+g(1+S\alpha\alpha_1+S\beta\beta_1+S\gamma\gamma_1)+1)=0.$$

362.) Nehmen wir $T\varrho = C$, so betrachten wir einen Theil der Masse, der ursprünglich kugelförmig war. Dieser wird

$$T\varphi^{-1}\varrho_1 = C,$$

ein Ellipsoid nach der Deformation.

Betrachten wir einen Theil, der nach der Deformation sphärisch ist, d. h.

$$T\varrho_1 = C,$$

so war dessen ursprüngliche Form

$$T\varphi\varrho = C$$

ein anderes Ellipsoid. Die Relation zwischen diesen Ellipsoiden folgt aus ihrer Gleichung. (Man sehe § 311.)

In jedem der beiden Fälle entsprechen die Achsen des Ellipsoids einem System von drei rechtwinkligen Durchmessern in der Kugel (§ 257).

---

*) Dieser erste Theil des § wurde vom Verfasser für diese Ausgabe mitgetheilt.

Wir müssen aber sorgfältig die Fälle unterscheiden, wo diese entsprechenden Geraden in den beiden Flächen zusammenfallen oder nicht. Denn in dem ersten Falle findet *reine* Deformation statt, in dem zweiten ist die Deformation mit einer Rotation verbunden.

Wir haben hier den Unterschied, auf den Stokes*) und Helmholtz**) aufmerksam machten, zwischen den Fällen von Flüssigkeitsbewegungen, in denen ein Geschwindigkeitspotential besteht oder nicht.

In der gewöhnlichen Flüssigkeitsbewegung haben wir eine reine Deformation; die Wirbelbewegung ist aber ihrem Wesen nach von einer Drehung begleitet. Die Resultante zweier reinen Deformationen ist im allgemeinen eine Deformation, verbunden mit einer Rotation.

Die Frage, die uns eben beschäftigt, liefert eine gute Illustration der Eigenschaften der Vectorfunctionen.

363.) *Das Kriterium einer reinen Deformation aufzustellen.* α, β, γ seien Einheits-Vectoren und parallel den Achsen des Deformationsellipsoids. Nach der Deformation werden dieselben $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$. Hieraus

$$\varrho_1 = \varphi\varrho = -a\alpha S\alpha\varrho - b\beta S\beta\varrho - c\gamma S\gamma\varrho .$$

Wir haben also als Kennzeichen einer reinen Deformation die Eigenschaft der Function φ, *selbstconjugirt* zu sein, d. h.

$$S\varrho\varphi\sigma = S\sigma\varphi\varrho .$$

364.) *Zwei aufeinander folgende reine Deformationen geben im allgemeinen eine Deformation, die von einer Drehung begleitet ist.*

Stellen φ und ψ die *reinen* Deformationen dar, so haben wir

$$\left.\begin{aligned} S\varrho\varphi\sigma &= S\sigma\varphi\varrho , \\ S\varrho\psi\sigma &= S\sigma\psi\varrho . \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Für die zusammengesetzte Deformation haben wir

$$\varrho_1 = \chi\varrho = \psi\varphi\varrho ,$$

und wir haben *nicht* allgemein

$$S\varrho\chi\sigma = S\sigma\chi\varrho .$$

Denn es ist $S\varrho\psi\varphi\sigma = S\sigma\varphi\psi\varrho$

nach (1), und $\psi\varphi$ ist im allgemeinen nicht dasselbe wie $\varphi\psi$ (man sehe Aufgabe 7 zu Kapitel V).

---

*) Cambridge Phil. Trans. 1845.

**) Crelle's Journal Bd. IV, 1857. Man sehe auch Phil. Mag. (Supplement) June 1867.

365.) Wir werden also darauf hingewiesen zu untersuchen, ob man nicht in *allen Fällen die reine Deformation von der Rotation trennen kann.*

Ist die lineare Vectorfunction, welche die Deformation ausdrückt, selbstconjugirt, dann ist die Deformation eine reine. Ist dies nicht der Fall, dann kann die Function auf verschiedene Weise in Theile zerlegt werden, von denen die einen einer reinen Deformation, die andern einer Rotation entsprechen; zwei dieser Zerlegungen sind besonders bemerkenswerth. (Es entspricht dies der Zerlegung einer Quaternion in die *Summe* eines Scalar- und Vectortheiles, oder in das *Product* eines Tensors und eines Vectors.)

Bezeichnen wir durch einen Strich eine selbstconjugirte Function, so haben wir entweder

$$\varphi = \bar{\psi} + V.\varepsilon(\ \ ),$$

$$\varphi = q\bar{\omega}(\ \ )q^{-1}, \quad \text{oder} \quad \varphi = \bar{\omega}_1 . q(\ \ )q^{-1},$$

wo ε ein Vector ist und q eine Quaternion, die als einfacher Versor angesehen werden kann.

Dass dies möglich ist, sehen wir daraus, dass φ neun unabhängige Constanten einschliesst, während $\bar{\psi}$ und $\bar{\omega}$ je sechs einschliessen, ε und q je drei.

Ist φ' die φ conjugirte Function, so haben wir

$$\varphi' = \bar{\psi} - V.\varepsilon(\ \ ),$$

so dass $$2\bar{\psi} = \varphi + \varphi'$$

und $$2V.\varepsilon(\ \ ) = \varphi - \varphi'$$

und dies bestimmt vollständig die erste Zerlegung. Es ist dies ein wohlbekannter Satz in der Quaternionentheorie; es scheint aber nicht allgemein bekannt zu sein in der kinematischen Theorie der Deformationen, dass es immer eine und nur eine Art der Zerlegung einer Deformation gibt in die geometrische Summe zweier getrennten Wirkungen. Die erste ist eine *reine* Deformation, die zweite eine Drehung, begleitet von einer gleichförmigen Ausdehnung senkrecht zu deren Achse; die Grösse der Ausdehnung ist $(\sec\vartheta - 1)$, wo ϑ der Drehungswinkel ist.

In der zweiten Form (die, wie es scheint, noch keine Lösung gefunden hat) haben wir:

$$\varphi = q\bar{\omega}(\ \ )q^{-1},$$

die reine Deformation geht hier der Drehung voraus. Hieraus

$$\varphi' = \bar{\omega} . q^{-1}(\ \ )q,$$

oder in der conjugirten Deformation folgt die reine Deformation auf die Drehung (in umgekehrter Richtung).

Hieraus: $$\varphi'\varphi = \bar{\varpi} \cdot q^{-1}(q\bar{\varpi}(\quad)q^{-1})q$$
$$= \bar{\varpi}^2,$$

und $\bar{\varpi}$ ergibt sich als Lösung einer biquadratischen Gleichung*).

Aus der identischen Gleichung

$$S.\sigma\varphi'\varphi\varrho = S.\varrho\varphi'\varphi\sigma$$

folgt, dass der Operator $\varphi'\varphi$ selbstconjugirt ist.

Auf dieselbe Weise erhält man

$$\varphi\varphi'(\quad) = q\bar{\varpi}^2(q^{-1}(\quad)q)q^{-1}$$

oder $$q^{-1}(\varphi\varphi'\varrho)q = \bar{\varpi}^2(q^{-1}\varrho q) = \varphi'\varphi(q^{-1}\varrho q)$$

und dies zeigt den Zusammenhang von $\varphi\varphi'$, $\varphi'\varphi$ und q.

Um q zu bestimmen, haben wir

$$\varphi\varrho \cdot q = q\bar{\varpi}\varrho,$$

welches auch ϱ sei, so dass

$$S.Vq(\varphi - \bar{\varpi})\varrho = 0$$

oder $$S.\varrho(\varphi' - \bar{\varpi})Vq = 0;$$

dies liefert $$(\varphi' - \bar{\varpi})Vq = 0.$$

Die erste jener Gleichungen liefert

$$Vq \parallel V.(\varphi - \bar{\varpi})\alpha(\varphi - \bar{\varpi})\beta,$$

wo α und β beliebige Vectoren sind; der Rest der Lösung ergibt sich hieraus. Ein ähnliches Verfahren liefert die Lösung, wenn die Drehung der reinen Deformation vorausgeht.

---

*) Es sei die cubische Gleichung in $\bar{\omega}$

$$\bar{\omega}^3 + g\bar{\omega}^2 + g_1\bar{\omega} + g_2 = 0.$$

Setzt man ω statt $\varphi\varphi'$ in der gegebenen Gleichung, so erhält man aus dieser Gleichung

$$(\bar{\omega} + g)\omega + g_1\bar{\omega} + g_2 = 0 = \bar{\omega}(\omega + g_1) + g\omega + g_2.$$

Eliminirt man $\bar{\omega}$ mit Hilfe der Gleichung $\bar{\omega}^2 = \omega$, so folgt

$$\omega^3 + (2g_1 - g^2)\omega^2 + ({g_1}^2 - 2gg_2)\omega - {g_2}^2 = 0.$$

Dies muss mit der bekannten cubischen Gleichung in ω übereinstimmen:

$$\omega^3 + m\omega^2 + m_1\omega + m_2 + 0.$$

Durch Vergleichen der Coefficienten haben wir:

$$2g_1 - g^2 = m, \qquad {g_1}^2 - 2gg_2 = m_1, \qquad {g_2}^2 = -m_2;$$

g_2 ist also bekannt und

$$g = \frac{{g_1}^2 - m_1}{2\sqrt{-m_2}},$$

wo $$2g_1 = m - \frac{({g_1}^2 - m_1)^2}{4m_2}.$$

Sind die Werthe der Grössen g bekannt, so ist $\bar{\omega}$ gegeben durch ω in obiger Gleichung. (Proc. R. S. E. 1870–71.)

366.) Im allgemeinen, wenn

$$\varrho_1 = \varphi\varrho = -\alpha_1 S\alpha\varrho - \beta_1 S\beta\varrho - \gamma_1 S\gamma\varrho,$$

so wird der Winkel zwischen zwei beliebigen Geraden, ϱ und σ, in dem veränderten Zustande des Körpers

$$\cos^{-1}(-S.U\varphi\varrho\, U\varphi\sigma).$$

Die Ebene $S\xi\varrho = 0$ wird (nach der Bezeichnungsweise des § 144)

$$S\xi\varrho_1 = 0 = S\xi\varphi\varrho = S\varrho\varphi'\xi.$$

Der Winkel zwischen den Ebenen $S\xi\varrho = 0$ und $S\eta\varrho = 0$:

$$\cos^{-1}(-S.U\xi U\eta),$$

wird

$$\cos^{-1}(-S.U\varphi'\xi U\varphi'\eta).$$

Der geometrische Ort der Geraden, die gleichviel gedehnt sind, ist

$$T\varphi U\varrho = e$$

oder

$$T\varphi\varrho = eT\varrho,$$

ein Kegel zweiter Ordnung.

367.) Im Falle einer einfachen Schiebung haben wir

$$\varrho_1 = \varphi\varrho = \varrho + \beta S\alpha\varrho,$$

wo

$$S\alpha\beta = 0.$$

Diejenigen Vectoren, deren Länge unverändert bleibt, werden gegeben durch

$$T\varrho_1 = T\varrho$$

oder

$$2S\beta\varrho S\alpha\varrho + \beta^2 S^2\alpha\varrho = 0.$$

Dies zerfällt in

$$S.\alpha\varrho = 0$$

und

$$S\varrho(2\beta + \beta^2\alpha) = 0.$$

Die Schnittlinie dieser Ebene und der Ebene von α, β steht senkrecht auf $2\beta + \beta^2\alpha$. Dieselbe sei $\alpha + x\beta$, dann ist

$$S.(2\beta + \beta^2\alpha)(\alpha + x\beta) = 0,$$

d. h.

$$2x - 1 = 0.$$

Die gesuchte Schnittcurve ist also

$$\alpha + \frac{\beta}{2}.$$

Was die Achsen der Deformation betrifft, so ist die eine derselben $\alpha\beta$, und die andern werden gefunden, indem man $T\varphi U\varrho$ zu einem Maximum und Minimum macht.

Es sei

$$\varrho = \alpha + x\beta,$$

dann ist

$$\varrho_1 = \varphi\varrho = \alpha + x\beta - \beta,$$

und

$$\frac{T\varrho_1}{T\varrho} = \text{max. oder min.}$$

liefert

$$x^2 - x + \frac{1}{\beta^2} = 0,$$

und hieraus ergeben sich die Werthe von x.

Als Verification:

$$S.(\alpha + x_1\beta)(\alpha + x_2\beta) = -1 + \beta^2 x_1 x_2,$$

und dies soll $= 0$ sein. Dem ist in der That so, da nach der Gleichung

$$x_1 x_2 = \frac{1}{\beta^2}.$$

Weiter

$$S.\{\alpha + (x_1 - 1)\beta\}\{\alpha + (x_2 - 1)\beta\} = -1 + \beta^2\{x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1\}$$

und auch dies muss $= 0$ sein. In der That ist $x_1 + x_2 = 1$ aus der Gleichung.

368.) Wir bedauern, dass die uns gesetzten Grenzen nicht erlauben, näher auf diese interessante Anwendung einzugehen.

Es mag aber von Interesse sein, besonders für die Betrachtung *irgend* einer continuirlichen Verrückung der Partikeln einer Masse, ein anderes der merkwürdigen analytischen Instrumente einzuführen, die Hamilton erfunden hat. Ein Theil von dem, was wir jetzt darstellen werden, ist schon in dem vorigen Kapitel gegeben worden, des Zusammenhanges wegen beginnen wir aber von neuem.

Wenn $$F\varrho = C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

die Gleichung eines Systems von Flächen ist und das Differential von (1)

$$S\nu d\varrho = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

ist, so steht der Vector ν auf der Fläche senkrecht, *und dessen Länge ist umgekehrt proportional der Normalentfernung zwischen zwei aufeinander folgenden Flächen.*

In der That sieht man aus (2), dass ν auf $d\varrho$, einem beliebigen Tangentenvector, senkrecht steht; dies beweist die erste Behauptung.

Gehen wir zu einer folgenden Fläche über, so können wir schreiben

$$S\nu\,\delta\varrho = \delta C.$$

Wir sehen, dass $$F(\varrho + \nu^{-1}\delta C) = C + \delta C;$$

dies beweist die zweite Behauptung.

Hieraus folgt, dass, wenn (1) eine Fläche gleichen Potentials oder eine Isothermalfläche ist, $-\nu$ der Grösse und Richtung nach die Kraft oder den Wärmefluss in einem beliebigen Punkte darstellt.

Wir sahen § 317, dass, wenn

$$\nabla = i\frac{d}{dx} + j\frac{d}{dy} + k\frac{d}{dz},$$

woraus folgt: $$\nabla^2 = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{d^2}{dy^2} - \frac{d^2}{dz^2},$$

dass dann $$\nu = \nabla F\varrho.$$

Dies stammt von Hamilton (Lectures on Quaternions p. 611).

369.) Hieraus folgt, dass die Wirkung der Vectoroperation ∇, auf eine beliebige Scalarfunction des Vectors ϱ eines Punktes, den Vector liefert, *dessen Grösse und Richtung die schnellste Aenderung in dem Werthe der Function darstellt.*

Wir wollen jetzt die Wirkung von ∇ auf eine *Vector*function betrachten, wie

$$\sigma = i\xi + j\eta + k\zeta.$$

Wir erhalten

$$\nabla\sigma = \left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}\right) - i\left(\frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy}\right) - \text{u. s. w.}$$

und aus dieser halb cartesischen Form sieht man leicht, dass:

wenn σ eine kleine Vectorverschiebung eines Punktes darstellt, die im Endpunkte des vom Anfangspunkte ausgehenden Vectors ϱ liegt, so stellt

$S\nabla\sigma$ die daraus folgende cubische Compression der Gruppe von Punkten dar, die in der Nähe des betrachteten Punktes liegen;

$V\nabla\sigma$ ist gleich der doppelten Vectorachse der Drehung derselben Gruppe von Punkten.

Weiter: $$S\sigma\nabla = -\left(\xi\frac{d}{dx} + \eta\frac{d}{dy} + \zeta\frac{d}{dz}\right) = -D\sigma$$

ist äquivalent der totalen Differentiation, indem man von einem Ende des Vectors σ zum andern übergeht.

370.) Betrachten wir die Gruppe von Punkten, die im ursprünglichen Zustande eine kleine Kugel füllten, deren Mittelpunkt der Endpunkt von ϱ ist. Die Gleichung dieser Kugel, auf jenen Punkt bezogen, ist

$$T\omega = e \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Nach der Verrückung wird ϱ zu $\varrho + \sigma$, und nach dem vorigen Paragraphen wird $\varrho + \omega$ zu $\varrho + \omega + \sigma - (S\omega\nabla)\sigma$.

Der Vector der neuen Fläche, welche jene Gruppe von Punkten umschliesst, ist also (der Vector geht aus von dem Endpunkte von $\varrho + \sigma$):

$$\omega_1 = \omega - (S\omega\nabla)\sigma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

ω ist also eine homogene, lineare Vectorfunction von ω_1; oder

$$\omega = \varphi\omega_1,$$

und aus (1) $$T\varphi\omega_1 = e,$$

die Gleichung der neuen Fläche, die eine Mittelpunktfläche zweiter Ordnung, also ein Ellipsoid ist.

Wir können leicht (2) näherungsweise lösen, wenn wir berücksichtigen, dass $T\sigma$ sehr klein ist, und dass wir in dem kleinen Gliede deshalb ω_1 statt ω setzen können, das heisst, dass wir die

Quadrate kleiner Grössen vernachlässigen dürfen. Also

$$\omega = \omega_1 + (S\omega_1 \nabla)\sigma.$$

371.) *Ist die Verrückung eines jeden Punktes eines Mittels proportional der Anziehung, die ein System materieller Massen in jenem Punkte ausübt, und hat dieselbe die Richtung jener Anziehung, so findet die Verrückung ohne Rotation statt.*

Denn ist $F\varrho = C$ die Potentialfläche, so ist $S\sigma d\varrho$ ein vollständiges Differential; d. h. in Cartesischen Coordinaten

$$\xi dx + \eta dy + \zeta dz$$

ist das Differential dreier unabhängiger Variabeln. Die Vectorachse der Drehung

$$i\left(\frac{d\xi}{dy} - \frac{d\eta}{dz}\right) + \text{ u. s. w.}$$

verschwindet, da jedes Glied verschwindet, d. h.

$$V\nabla\sigma = 0.$$

Umgekehrt: *findet keine Drehung statt, so sind die Verrückungen den Normalen einer Reihe von Flächen proportional und parallel.* Denn

$$0 = V.d\varrho\, V\nabla\sigma = (Sd\varrho\nabla)\sigma - \nabla S\sigma d\varrho,$$

wo in dem letzten Gliede ∇ nur allein auf σ einwirkt.

Von den beiden Gliedern der rechten Seite ist das erste ein vollständiges Differential, da man es schreiben kann $-D_{d\varrho}\sigma$, das zweite Glied muss also ebenfalls ein solches sein.

In einem deformirten Systeme findet also keine Compression statt, wenn

$$S\nabla\sigma = 0,$$

keine Drehung, wenn $V\nabla\sigma = 0,$

also eine einfache Verschiebung, wenn

$$\sigma = \alpha$$

ein constanter Vector. Es ist dies ein Fall, von

$$\nabla\sigma = 0.$$

In dem wichtigen Falle, wo

$$\sigma = e\nabla F\varrho$$

findet keine Drehung statt, da

$$\nabla\sigma = e\nabla^2 F\varrho$$

eine Scalar ist.

In diesem Falle findet also nur eine Translation und Compression statt, und letztere ist in jedem Punkte proportional der Dichtigkeit einer Massenvertheilung, welche das Potential $F\varrho$ liefern würde. Denn ist r jene Dichtigkeit, dann haben wir

$$\nabla^2 F\varrho = 4\pi r.^*)$$

---

*) Proc. R. S. E. 1862–63.

372.) Das *Trägheitsmoment* eines Körpers in Bezug auf einen Einheits-Vector α als Achse ist

$$Mk^2 = -\Sigma m(V\alpha\varrho)^2,$$

wo ϱ der Vector des Massentheilchens m ist; der Anfangspunkt von ϱ liegt in der Achse.

Nehmen wir $kT\alpha = e^2$, so erhalten wir den geometrischen Ort des Endpunktes von α:

$$Me^4 = -\Sigma m(V\alpha\varrho)^2 = MS\alpha\varphi\alpha,$$

wie wir schreiben können. Es ist dies das Moment-Ellipsoid.

Ist ω der Vector des Schwerpunktes, σ der Vector vom m von diesem Punkte aus, so haben wir

$$\varrho = \omega + \sigma;$$

deshalb
$$Mk^2 = -\Sigma m\{(V\alpha\omega)^2 + (V\alpha\sigma)^2\}$$
$$= -M(V\alpha\omega)^2 + MS\alpha\varphi_1\alpha.$$

Für die Hauptachsen ist k Maximum, Minimum, oder Maximum-Minimum mit der Bedingung

$$\alpha^2 = -1.$$

Wir haben also

$$S\alpha'(\omega V\alpha\omega - \varphi_1\alpha) = 0,$$
$$S\alpha'\alpha = 0;$$

hieraus
$$-\varphi_1\alpha + \omega V\alpha\omega = p\alpha = k^2\alpha$$

(indem man mit $S.\alpha$ operirt).

Weiter folgt: $(\varphi_1 + k^2 + \omega^2)\alpha = +\omega S\alpha\omega$ . . . . . (1)

Dies bestimmt den Werth von α. k^2 ergibt sich aus der Gleichung

$$S\omega(\varphi_1 + k^2 + \omega^2)^{-1}\omega = 1 . . . . . (2)$$

Nun ist die Normale von

$$S\sigma(\varphi_1 + k^2 + \omega^2)^{-1}\sigma = 1 . . . . . (3)$$

im Punkte σ $(\varphi_1 + k^2 + \omega^2)^{-1}\sigma$.

(3) geht aber nach (2) durch $-\omega$, und in jenem Punkte ist die Normale

$$(\varphi_1 + k^2 + \omega^2)^{-1}\omega,$$

und nach (1) ist dies parallel einem der gesuchten Werthe von α.

Wir haben also den Binet'schen Satz bewiesen:

Dass die Hauptachsen in einem beliebigen Punkte senkrecht stehen auf drei Flächen, die confocal sind mit dem Momentellipsoid und durch jenen Punkt gehen.

Uebungsbeispiele zu Kapitel X.

1. Aus kinematischen Principien die Gleichung der Cycloide herzuleiten; die bekannten elementaren Eigenschaften des Bogens, der Tangente, des Krümmungsradius und der Evolute der Curve zu beweisen.

2. Man deute kinematisch die Gleichung

$$\dot{\varrho} = a\,U(\beta t - \varrho),$$

wo β ein gegebener Vector, a eine gegebene Scalar ist.

Nachzuweisen, dass die Gleichung eine ebene Curve darstellt, und man gebe dieselbe in integrirter Form, unabhängig von t.

3. Schreiben wir

$$\omega = \beta t - \varrho,$$

so wird die Gleichung in (2)

$$\beta - \omega = a\,U\omega,$$

man deute dies kinematisch und gebe ein Integral.

Welches ist die Natur des Verfahrens, das wir eingeschlagen haben, um die Gleichung von (2) auf diese Form zu bringen?

4. Die Bewegung eines Punktes in einer Ebene ist gegeben, man beziehe dieselbe auf

(a) feste rechtwinklige Vectoren in jener Ebene;

(b) rechtwinklige Vectoren in der Ebene, die sich mit gleichbleibender Geschwindigkeit um einen festen Punkt drehen;

(c) Vectoren in der Ebene, die sich mit verschiedener aber constanter Geschwindigkeit drehen;

(d) den Vectorradius eines festen Kreises, der nach dem Punkte gezogen ist, in welchem die Tangente von dem bewegten Punkte aus den Kreis berührt.

In jedem dieser Fälle übertrage man das Resultat auf Cartesische Coordinaten.

5. Jeder Punkt einer Geraden von gegebener Länge, deren Endpunkte sich auf festen Geraden in einer gegebenen Ebene bewegen, beschreibt eine Ellipse.

Zu zeigen, wie man Mittelpunkt und Achsen dieser Ellipse findet; und die Winkelgeschwindigkeit des beschreibenden Punktes um den Mittelpunkt der Ellipse, wenn die beschreibende Gerade gleichmässig rotirt.

Diese Construction so umzugestalten, dass man nachweisen kann, die Ellipse sei eine Hypotrochoide.

6. Ein Punkt A bewege sich gleichförmig in einem Kreisschnitte eines Kegels. Man bestimme die Winkelgeschwindigkeit des

Punktes a, in welchem die durch A gehende Erzeugende einen antiparallelen Schnitt trifft, um den Mittelpunkt jenes Schnittes.

7. Man löse allgemein die Aufgabe, den Weg zu finden, auf dem ein Punkt in der kürzesten Zeit von einem gegebenen Punkte zu einem andern gelangt, wenn die Geschwindigkeit im Punkte, dessen Vector ϱ ist, gegeben wird durch die Scalarfunction $f(\varrho)$.

Man behandle noch folgende specielle Fälle:

(a) $f\varrho = a \quad \text{und} \quad S\alpha\varrho > 1,$

$f\varrho = b \quad \text{und} \quad S\alpha\varrho < 1.$

(b) $f\varrho = S\alpha\varrho,$

(c) $f\varrho = -\varrho^2.$ (Tait, Trans. R. S. E. 1865.)

8. Ist in der vorhergehenden Aufgabe $f\varrho$ eine derartige Function von $T\varrho$, dass irgend eine jener Bahnen ein Kreis ist, so sind alle derartige Bahnen Kreise, und alle Bahnen, die von einem Punkte ausgehen, schneiden sich wieder in einem andern Punkte.

(Maxwell, Cam. and Dubl. Math. Journal, IX, p. 9.)

9. Man deute als Resultat von aufeinander folgenden conischen Rotationen den scheinbar selbstverständlichen Satz

$$\frac{\alpha}{\gamma}\frac{\gamma}{\beta}\frac{\beta}{\alpha} = 1$$

und

$$\frac{\alpha}{\varkappa}\frac{\varkappa}{\iota}\frac{\iota}{\vartheta}\cdots\frac{\delta}{\gamma}\frac{\gamma}{\beta}\frac{\beta}{\alpha} = 1.$$

(Hamilton, Lectures p. 334.)

10. Man deute auf dieselbe Weise die Quaternionenoperatoren

$$q = (\delta\varepsilon^{-1})^{\frac{1}{2}}(\varepsilon\zeta^{-1})^{\frac{1}{2}}(\zeta\delta^{-1})^{\frac{1}{2}}$$

und

$$q = \left(\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}.$$ (Ibid.)

11. Die Achse und den Winkel der Drehung anzugeben, durch welche ein gegebenes System von rechtwinkligen Einheits-Vectoren α, β, γ in ein anderes gegebenes System $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ übergeführt wird.

12. Nachzuweisen, dass, wenn

$$\varphi\varrho = \varrho + V\varepsilon\varrho$$

der lineare Vectoroperator φ, eine Drehung um den Vector ε darstellt, verbunden mit einer gleichmässigen Ausdehnung in allen darauf senkrecht stehenden Richtungen.

Man beweise dies auch auf die Weise, dass man den Operator darstellt, welcher die Ausdehnung ohne die Drehung hervorbringt, und denjenigen, der die Drehung ohne die Ausdehnung hervorbringt, und dann die Wirkung beider zusammen betrachtet.

13. Man drücke durch Quaternionen die Bewegung der einen

Seite eines starren Kegels aus, welcher mit gleichbleibender Geschwindigkeit auf einem festen Kegel rollt; die Spitzen der beiden fallen dabei stets zusammen.

14. Die gleichzeitigen Drehungsgeschwindigkeiten eines Körpers um die Hauptachsen durch den Schwerpunkt seien gegeben; man bestimme die Lage dieser Achsen im Raume in einem beliebigen Momente.

15. Man bestimme die lineare Vectorfunction und den Quaternionenoperator, vermöge deren man in jedem einfachen Krystall des cubischen Systems von der Normalen einer gegebenen Fläche zu einer andern übergehen kann.

Wie können wir dieselben benutzen, um eine Reihe von Flächen zu unterscheiden, die zur selben Zone gehören?

16. Man classificire die einfachen Formen des cubischen Systems mit Hilfe der Eigenschaften der linearen Vectorfunction oder des Quaternionenoperators.

17. Die Vectornormale einer Fläche anzugeben, welche die Kante symmetrisch abstumpft, welche durch den Schnitt zweier gegebenen Flächen gebildet wird.

18. Die Normalen eines Flächenpaares anzugeben, die die gegebene Kante symmetrisch abstumpfen.

19. Die Normale einer Fläche anzugeben, die gleichviel gegen drei gegebene Flächen geneigt ist.

20. Nachzuweisen, dass das rhombische Dodecaeder aus dem Würfel hergeleitet werden kann, oder aus dem Octaeder durch Abstumpfung der Kanten.

21. Die Form aufzusuchen, deren Flächen die Kanten des rhombischen Dodecaeders ersetzen.

22. Nachzuweisen, dass die beiden Arten der hemiedrischen Formen durch die Quaternionenausdrücke angezeigt werden.

23. Nachzuweisen, dass der Würfel erhalten werden kann durch Abstumpfung der Kanten des regelmässigen Tetraders.

24. Man zeige, welche Veränderungen in der Hilfs-Vectorfunction vorzunehmen sind, um zu dem pyramidalen und prismatischen System überzugehen.

25. In dem Rhomboedersystem nimmt der Quaternionenoperator eine äusserst einfache Form an. Man gebe diese Form an und zeige, auf welche Resultate dieselbe hinweist.

26. Nachzuweisen, dass, wenn der Hodograph ein Kreis ist, und die Beschleunigung nach einem festen Punkte gerichtet ist, die Bahn ein Kegelschnitt sein muss.

27. In dem Hodographen, welcher der nach einem festen Punkte

gerichteten Beschleunigung $f(D)$ entspricht, ist die Krümmung umgekehrt proportional $D^2 f(D)$.

28. Wenn zwei kreisförmige Hodographen, die eine gemeinschaftliche Sehne haben, welche durch den gemeinschaftlichen Kraftmittelpunkt geht, durch zwei beliebige gemeinschaftliche orthogonale Curven geschnitten werden, so ist die Summe der beiden Zeiten, in denen jene beiden abgetrennten Bogen der Hodographen beschrieben werden (dieselben seien klein oder gross), dieselbe für die beiden Hodographen. (Hamilton, Elements p. 725.)

29. Man benutze diesen Satz, um nach Lambert nachzuweisen, dass die Zeit, in der ein beliebiger Bogen einer elliptischen Bahn beschrieben wird, ausgedrückt werden kann durch die Sehnen des Bogens und die äussersten Radiivectores.

30. Ist $q(\ \ )q^{-1}$ der Operator, der ein System rechtwinkliger Einheits-Vectoren α, β, γ in ein anderes $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ überführt, so soll man nachweisen, dass drei Gleichungen bestehen von der Form:

$$S\alpha\beta_1 - S\beta\alpha_1 = -\frac{4 Sq S\gamma q}{Tq^2}.$$

Kapitel XI.

Physikalische Anwendungen.

373.) Zum Schluss wollen wir an einigen Beispielen zeigen, wie leicht sich die Quaternionen auf Fragen der mathematischen Physik anwenden lassen; denn hauptsächlich hierauf, mehr noch als auf den Anwendungen auf Geometrie und Kinematik, beruht der wahre Nutzen dieser Rechnungsart, ausgenommen in den Augen jener Mathematiker, für welche Transversale, anharmonische Büschel und dergleichen einen uns unverständlichen Reiz haben.

Wir können es natürlich nicht unternehmen, Beispiele aus allen Theilen der Physik anzuführen, oder einen Theil eingehend zu behandeln. In diesem Kapitel soll nicht Physik gelehrt werden, sondern wir wollen nur an einigen Beispielen zeigen, wie sehr sich die Quaternionen zur Behandlung jener Aufgaben eignen.

Wir beginnen mit einigen allgemeinen Sätzen der Dynamik, der Bildung des Gleichgewichts und Bewegungsgleichungen eines starren Systems, einiger Eigenschaften der Centralachse, der Bewegung eines festen Körpers um seinen Schwerpunkt.

374.) Beliebige Kräfte sollen auf ein starres System wirken, die Kraft β auf den Punkt, dessen Vector α ist, u. s. w. Wird der Körper unendlich wenig verrückt, so dass α wird $\alpha + \delta\alpha$, so ist die geleistete Arbeit

$$\Sigma S\beta\delta\alpha .$$

Soll Gleichgewicht stattfinden, so muss dies verschwinden.

Die Bedingung des Gleichgewichts eines starren Systems ist demnach

$$\Sigma S\beta\delta\alpha = 0.$$

Besteht die Verrückung in einer Translation, so ist $\delta\alpha$ ein beliebiger constanter Vector, und es folgt

$$\Sigma\beta = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Für eine Rotation haben wir nach § 350, wenn ε die Achse bedeutet und $T\varepsilon$ unendlich klein ist,

$$\delta\alpha = V\varepsilon\alpha,$$

und $$\Sigma S.\beta V\varepsilon\alpha = \Sigma S.\varepsilon V\alpha\beta = S.\varepsilon\Sigma(V\alpha\beta) = 0$$

für jedes ε; es folgt also

$$\Sigma.V\alpha\beta = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Diese Gleichungen (1) und (2) sind den gewöhnlichen sechs Gleichgewichtsbedingungen äquivalent.

375.) Es seien für das Kräftesystem

$$\Sigma\beta = \beta_1$$

$$\Sigma.V\alpha\beta = \alpha_1$$

die Punkte aufzusuchen, für welche die Achse des Kräftepaares α_1 parallel ist der resultirenden Kraft β_1.

γ sei der Vector eines derartigen Punktes. Für diesen Punkt ist die Achse des Kräftepaares

$$\Sigma.V(\alpha-\gamma)\beta = \alpha_1 - V\gamma\beta_1,$$

und aus der Bedingung der Aufgabe

$$x\beta_1 = \alpha_1 - V\gamma\beta_1.$$

Man operire mit $S\beta_1$, so folgt

$$x\beta_1^2 = S\alpha_1\beta_1$$

und $$V\gamma\beta_1 = \alpha_1 - \beta_1^{-1}S\alpha_1\beta = -\beta_1 V\alpha_1\beta_1^{-1}$$

oder $$\gamma = V\alpha_1\beta_1^{-1} + y\beta_1,$$

eine Gerade (die Centralachse) der resultirenden Kraft parallel.

376.) *Die Punkte aufzufinden, für welche das Kräftepaar ein Minimum ist.*

Hier muss sein $T(\alpha_1 - V\gamma\beta_1) = \text{Minimum}$,

also $$S.(\alpha_1 - V\gamma\beta_1)V\beta_1\gamma' = 0,$$

wo γ' ein beliebiger Vector ist. Es ist unnöthig, $\gamma' = \beta_1$ zu versuchen, wir können aber nacheinander γ' gleich setzen α_1 und $V\alpha_1\beta_1$. Wir erhalten

$$S.\gamma V.\beta_1 V\alpha_1\beta_1 = 0$$

und $$(V\alpha_1\beta_1)^2 - \beta_1^2 S.\gamma V\alpha_1\beta_1 = 0.$$

Hieraus $$\gamma = xV\alpha_1\beta_1 + y\beta_1,$$

und indem man mit $S.V\alpha_1\beta_1$ operirt,

$$\frac{1}{\beta^2}(V\alpha_1\beta_1)^2 = x(V\alpha_1\beta_1)^2$$

oder $$\gamma = V\alpha_1\beta_1^{-1} + y\beta_1,$$

derselbe geometrische Ort wie oben.

377.) Das Kräftepaar verschwindet, wenn

$$\alpha_1 - V\gamma\beta_1 = 0,$$

dies bedingt $$S\alpha_1\beta_1 = 0,$$

oder die Kraft muss *in* der Ebene des Kräftepaares liegen.

Ist dies der Fall, dann hat man

$$\gamma = \alpha_1 \beta_1^{-1} + x\beta_1 ,$$

nochmals die Centralachse.

378.) Die Werthe der Kräfte ξ und ξ_1 anzugeben, die in ε und ε_1 ihren Angriffspunkt haben und dem gegebenen System äquivalent sind

$$\xi + \xi_1 = \beta_1 ,$$
$$V\varepsilon\xi + V\varepsilon_1\xi_1 = \alpha_1 .$$

Hieraus: $$V\varepsilon\xi + V\varepsilon_1(\beta_1 - \xi) = \alpha_1$$

und $$\xi = (\varepsilon - \varepsilon_1)^{-1}(\alpha_1 - V\varepsilon_1\beta_1) + x(\varepsilon - \varepsilon_1);$$

ein ähnlicher Ausdruck liefert ξ_1. Die unbestimmten Glieder kann man weglassen, da sie offenbar gleich und entgegengesetzt sind; sie stellen in der That irgend welche gleiche und entgegengesetzte Kräfte dar, die in der Verbindungslinie der gegebenen Punkte wirken.

378 bis.)* Wir nehmen jetzt an, *ein Kräftesystem, das auf gegebene Punkte wirkt, werde so gedreht, dass die Richtungen der Kräfte dieselben relativen Neigungen behalten.*

Wir beziehen dieselben auf ein rechtwinkliges System von Einheits-Vectoren i', j', k', die an der Drehung Theil nehmen. Für die Componente parallel zu i' haben wir die Resultirende

$$-i'Si'\Sigma\beta = -i'Si'\beta,$$

und das Kräftepaar

$$-\Sigma V\alpha i'Si'\beta = Vi'\Sigma\alpha S\beta i' = Vi'\varphi i',$$

wie wir schreiben wollen.

Diese sind zusammengenommen äquivalent der obigen Resultirenden, die in dem Punkte

$$\frac{\varphi i'}{Si'\beta_1}$$

ihren Anfangspunkt hat.

Da die Kräfte sich mit i' drehen, so ist dies ein constanter Vector. Es liefert in der That den Mittelpunkt der parallelen Kräfte für die i'-Componenten. Die drei Punkte dieser Art liegen offenbar in der Ebene

$$S\varrho\varphi'^{-1}\beta_1 = 1 ,$$

welche man die Mittelpunktebene genannt hat.

Der Mittelpunkt der Mittelpunktebene hat den Vector

$$\varphi(\beta_1^{-1}).$$

Verlegen wir den Anfangspunkt nach diesem Punkte, so erhalten wir mit dem neuen Werthe von φ

$$\varphi(\beta_1) = 0 .$$

---

* Von dem Verfasser für diese Ausgabe mitgetheilt.

Da die Lage des i', j', k'-Systems in Bezug auf die Kräfte eine beliebige ist, so kann man setzen

$$\beta_1 = bk'.$$

Bedenkt man, dass $\varphi i'$ und $\varphi j'$ Vectoren sind in der Mittelpunktebene und dass deren Lage abhängt von der ursprünglichen Wahl der i', j', k', so kann man diese so wählen, dass

$$S.\varphi i'\varphi j' = 0;$$

denn dies ist gleichbedeutend mit

$$S.i'\varphi'\varphi j' = 0,$$

und welches auch φ sei, so ist $\varphi'\varphi$ eine selbstconjugirte Function.

Es sei i, j, k deren Haupt-Vectorsystem, e_1^2, e_2^2, 0 deren Parameter. Wir können dann schreiben

$$\varphi i' = e_1 z', \qquad \varphi j' = e_2 j', \qquad \varphi k' = 0.$$

Wir haben nun die einzige Kraft

$$bk'$$

und das Kräftepaar

$$-eVii' - e_2 Vjj' = V(\omega ii' + \omega jj'),$$

wenn wir setzen $\omega\sigma = -e_1 iSi\sigma - e_2 jSj\sigma$.

Die Kraft und das Kräftepaar haben eine einzige Resultirende, wenn

$$Sj'\omega i - Si'\omega j = 0,$$

dies liefert $S.i(V.\omega ik' - \omega j) = 0.$

Hieraus: $ti' = Vk'\omega j + k'\omega i,$

und $tj' = -Vk'\omega i + k'Vk'\omega j.$

t ist eine Scalar, deren Werth man erhält, indem man den Tensor auf jeder Seite jener beiden Gleichungen nimmt.

Die Gleichung der Geraden, in welcher jene einzige Resultirende wirkt, ist

$$bVk'\varrho = V\omega ii' + V\omega jj',$$

oder, indem man mit $V.k'$ operirt und die Werthe von i', t, j' einführt,

$$-bt\varrho = (\omega^2 + u)k' - e_1 e_2 k.$$

Operirt man mit $(\omega^2 + u)^{-1}$ und dann mit $S.\varrho$, so erhalten wir

$$b^2 t^2 S.\varrho(\omega^2 + u)^{-1}\varrho = t^2 - \frac{1}{u}(e_1^2 - u)(e_2^2 - u).$$

Es liegt nun sehr nahe, den Versuch zu machen mit

$$u = e_1^2 \quad \text{oder} \quad u = e_2^2.$$

Nehmen wir den ersten Ausdruck, so folgt

$$S.\varrho(\omega^2 - e_1^2)^{-1}\varrho = \frac{1}{b^2}.$$

Man sieht, dass dies eine *ebene Curve* ist, denn wir haben

$$S i \varrho = 0, \quad \text{wenn} \quad u = e_1^{\,2}.$$

Alle einzelne Resultirende gehen also durch je zwei ebene Curven, welche die Focalkegelschnitte des Systems

$$S \,.\, \varrho(\omega^2 + h)^{-1} \varrho \, \frac{1}{b^2}$$

sind. Diesen schönen Satz verdankt man Minding (Crelle, Bd. XIV, XV), der durch ein sehr mühsames Verfahren zu demselben gelangte. Die Untersuchung, die wir eben durchgeführt haben, ist ein ausgezeichnetes Beispiel der Einfachheit der Quaternionenmethode. (Tait, London Mathematical Society 1879.)

Das Perpendikel vom Anfangspunkt auf die Hauptachsen des Kräftesystems ist

$$\varrho = \frac{1}{b} V \,.\, k'(V \omega i i' + V \omega j j').$$

Geben wir i', j', k' alle möglichen Werthe, so erhalten wir ein *Volumen* als geometrischen Ort. Das Volumen wird äusserlich und innerlich begrenzt durch die beiden Theile der Fläche

$$S \,.\, \varrho(\omega^2 - \varrho^2)^{-1} \varrho = 0 \,.$$

Wir überlassen den Beweis dem Leser.

Setzt man ϱ^{-1} an Stelle von ϱ, so sieht man, dass es die Reciproke oder das elektrische Bild ist eines speciellen Falles der Wellenfläche von Fresnel. (Proc. R. S. E. 1879.)

379.) Für die Bewegung eines starren Systems haben wir

$$\Sigma S(m \ddot{\alpha} - \beta) \delta \alpha = 0$$

aus der allgemeinen Gleichung von Lagrange.

Nehmen wir an, die Verrückung $\delta \alpha$ entspreche einer *Translation*, dann ist $\delta \alpha$ ein *beliebiger* constanter Vector; es folgt

$$\Sigma(m \ddot{\alpha} - \beta) = 0,$$

oder, wenn α_1 den Vector des Schwerpunktes bezeichnet, und also

$$\alpha_1 \Sigma m = \Sigma m \alpha,$$

so haben wir sofort $\qquad \ddot{\alpha}_1 \Sigma m - \Sigma \beta = 0,$

d. h. der Schwerpunkt bewegt sich so, als ob die ganze Masse in ihm concentrirt wäre und als ob alle Kräfte auf denselben wirken.

380.) Die Verrückung $\delta \alpha$ entspreche jetzt einer Rotation um die Achse ε, die durch den Anfangspunkt geht, dann ist

$$\delta \alpha = V \varepsilon \alpha,$$

wobei man annimmt, dass $T\varepsilon$ unendlich klein sei.

Hieraus $\qquad \Sigma S \,.\, \varepsilon V \alpha (m \ddot{\alpha} - \beta) = 0$

für jeden Werth von ε. Es muss also

$$\Sigma . V\alpha(m\ddot{\alpha} - \beta) = 0$$

sein, und dieser Ausdruck enthält die übrigen drei gewöhnlichen Bewegungsgleichungen.

Man verlege nun den Anfangspunkt nach dem Schwerpunkte, d. h. man setze

$$\alpha = \alpha_1 + \omega ,$$

dann wird unsere Gleichung

$$\Sigma V(\alpha_1 + \omega)(m\ddot{\alpha}_1 + m\ddot{\omega} - \beta) = 0 ,$$

oder, da $\Sigma m\omega = 0$,

$$\Sigma V\omega(m\ddot{\omega} - \beta) + V\alpha_1(\ddot{\alpha}_1 \Sigma m - \Sigma\beta) = 0 .$$

Nun ist aber $\ddot{\alpha}_1 \Sigma m - \Sigma\beta = 0 ,$

die Gleichung vereinfacht sich also zu

$$\Sigma V\omega(m\ddot{\omega} - \beta) = 0 .$$

$\Sigma V\omega\beta$ ist das Kräftepaar in Bezug auf den Schwerpunkt, hervorgebracht durch die angewandten Kräfte; nennen wir dasselbe φ, so folgt

$$\Sigma m V\omega\ddot{\omega} = \varphi . \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

381.) Durch einmalige Integration erhalten wir

$$\Sigma m V\omega\dot{\omega} = \gamma + \int \varphi dt . \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Da die betrachtete Bewegung eine in Bezug auf den Schwerpunkt *relative* ist, so muss sie in einer Drehung um eine im allgemeinen veränderliche Achse bestehen.

Bezeichnen wir mit ε sowohl die Richtung der Achse als die Winkelgeschwindigkeit um dieselbe, dann ist:

$$\dot{\omega} = V\varepsilon\omega .$$

Obige Gleichung kann also geschrieben werden

$$\Sigma m\omega V\varepsilon\omega = \gamma + \int \varphi dt .$$

Operirt man mit $S.\varepsilon$, so folgt

$$\Sigma m(V\varepsilon\omega)^2 = S\varepsilon\gamma + S\varepsilon \int \varphi dt . \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

operirt man aber direkt mit $2\int S\varepsilon dt$ auf Gleichung (1), so folgt

$$\Sigma m(V\varepsilon\omega)^2 = -h^2 + 2\int S\varepsilon\varphi dt . \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

(2) und (4) enthalten die gewöhnlichen vier Integrale erster Ordnung.

382.) Wirken keine Kräfte auf den Körper, dann ist $\varphi = 0$ und deshalb

$$\Sigma m\omega V\varepsilon\omega = \gamma . \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

$$\Sigma m\dot{\omega}^2 = \Sigma m(V\varepsilon\omega)^2 = -h^2 \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

und aus (3) und (6)

$$S\varepsilon\gamma = -h^2 . \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Eine Deutung von (6) ist, dass die kinetische Energie der Rotation constant bleibt; eine andere, dass der Vector ε in einem Ellipsoid endigt, dessen Mittelpunkt im Anfangspunkte liegt, und welches also die Winkelgeschwindigkeit angibt, wenn die Richtung der Achse gegeben ist; (7) zeigt, dass die Endpunkte der augenblicklichen Drehungsachse stets in einer im Raume festen Ebene liegen.

Nach (5) ist (7) die Gleichung der Tangentialebene von (6) im Endpunkte des Vectors ε. Das Ellipsoid (6) *rollt* also auf der Ebene (7).

Aus (5) und (6) erhalten wir die Gleichung, der ε genügen muss:

$$\gamma^2 \Sigma . m(V\varepsilon\omega)^2 = -h^2(\Sigma . m\omega V\varepsilon\omega)^2.$$

Dies ist die Gleichung eines Kegels zweiten Grades, der in dem Körper fest liegt. All die bekannten Resultate, betreffend die Bewegung eines starren Körpers auf den keine Kräfte wirken und dessen Schwerpunkt fest liegt, kann man also fast allein aus der Anschauung herleiten. Die einzigen Schwierigkeiten, die bei verwickeltern Eigenschaften auftreten, sind die der Integration, die mit der Natur der Frage zusammenhängen und sich stets darbieten, welche analytische Methode man auch anwenden möge. (Hamilton, Proc. R. I. A. 1848.)

383.) Es sei α die ursprüngliche Lage von ω, q die Quaternion, welche den Körper von seiner Anfangslage in seine Lage zur Zeit t überführt. Dann ist

$$\omega = q\alpha q^{-1}$$

und Hamilton's Gleichung (5) des letzten Abschnittes wird

$$\Sigma . mq\alpha q^{-1} V . \varepsilon q\alpha q^{-1} = \gamma,$$

oder

$$\Sigma . mq\{\alpha S . \alpha q^{-1}\varepsilon q - q^{-1}\varepsilon q\alpha^2\}q^{-1} = \gamma.$$

Es sei nun

$$\varphi\varrho = \Sigma . m(\alpha S\alpha\varrho - \alpha^2\varrho) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

wo φ eine selbstconjugirte, lineare Vectorfunction ist, deren constituirende Vectoren in dem Körper in seiner ursprünglichen Lage fest liegen. Obige Gleichung kann also jetzt geschrieben werden:

$$q\varphi(q^{-1}\varepsilon q)q^{-1} = \gamma$$

oder

$$\varphi(q^{-1}\varepsilon q) = q^{-1}\gamma q .$$

Der Einfachheit wegen schreiben wir

$$\left.\begin{aligned} q^{-1}\varepsilon q &= \eta , \\ q^{-1}\gamma q &= \xi . \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Hamilton's dynamische Gleichung wird dann einfach

$$\varphi\eta = \xi . \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

384.) Man sieht leicht, was die neuen Vectoren η und ξ vorstellen. Denn wir können (2) in der Form schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= q\eta q^{-1} \\ \gamma &= q\xi q^{-1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2')$$

hieraus sieht man, dass η derjenige Vector des Körpers in der Anfangslage ist, der zur Zeit t die augenblickliche Drehungsachse wird.

Wirken keine Kräfte, so ist γ constant, und ξ ist die Anfangslage des Vectors, der zur Zeit t auf der unveränderlichen Ebene senkrecht steht.

385.) Die vollständige Lösung der Aufgabe ist enhalten in den Gleichungen (2) (3) oben und (4) in § 356.*) Schreiben wir dieselben von neüem, so erhalten wir:

$$q\eta = 2\dot{q}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$$\gamma q = q\xi, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\varphi q = \xi. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Eliminiren wir ξ und η, so folgt:

$$2\dot{q} = q\varphi^{-1}(q^{-1}\gamma q) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

q ist jetzt die einzige Unbekannte; denn ist γ veränderlich, so müssen wir uns dasselbe ausgedrückt denken durch q und t.

Es ist kaum denkbar, dass man eine einfachere oder leichter zu deutende Gleichung für q aufstellen könnte, so lange nicht Symbole erdacht werden, deren Bedeutung viel mehr umfasst, als dies bei irgend welchen, die wir jetzt kennen, der Fall ist.

386.) Ehe wir die Integration dieser Gleichung betrachten, wollen wir einige Folgerungen aus jener Gruppe von Gleichungen des § 385 untersuchen. So erhalten wir durch Differentiation (2)

$$\gamma\dot{q} + \dot{\gamma}q = \dot{q}\xi + q\dot{\xi},$$

und eliminiren wir $\dot{q}$ mit Hilfe von (4)

$$\gamma q\eta + 2\dot{\gamma}q = q\eta\xi + 2q\dot{\xi},$$

woraus

$$\dot{\xi} = V\xi\eta + q^{-1}\dot{\gamma}q;$$

wirken keine Kräfte, so liefert dies

$$\dot{\xi} = V\xi\varphi^{-1}\xi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

und (da $\dot{\xi} = \varphi\dot{\eta}$)

$$\varphi\dot{\eta} = -V.q\varphi\eta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

---

*) Es ist nicht nöthig, zu diesen Gleichungen hinzuzufügen

$$Tq = \text{constans},$$

da dies aus der Form von (4) schon folgt. Denn wäre Tq veränderlich, so müsste eine Quaternion an Stelle von η stehen. In der That ist

$$\frac{d}{dt}(Tq)^2 = 2S.\dot{q}Kq = (Tq)^2 S\eta = 0.$$

Wirken Kräfte, so hat man auf der rechten Seite einer jeden dieser Gleichungen das Glied $q^{-1}\dot{\gamma}q$ oder $q^{-1}\psi q$ hinzuzufügen.

387.) Wir wollen jetzt die Bildung der Function φ betrachten. Nach der Definition (1) haben wir

$$\begin{aligned}\varphi\varrho &= \Sigma.m(\alpha S\alpha\varrho - \alpha^2\varrho)\\ &= -\Sigma.m\alpha V\alpha\varrho.\end{aligned}$$

Hieraus $$-S\varrho\varphi\varrho = \Sigma.m(TV\alpha\varrho)^2,$$

so dass $-S\varrho\varphi\varrho$ das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf den Vector ϱ ist, multiplicirt durch das Quadrat des Tensors von ϱ.

Die Gleichung $$S\varrho\varphi\varrho = -h^2$$

gehört also einem Ellipsoid an, dessen Leitstrahlen umgekehrt proportional sind der Quadratwurzel der auf sie bezüglichen Trägheitsmomente.

Sind i, j, k Einheitsvectoren in Richtung der Achsen, so haben wir

$$\left.\begin{aligned}Si\varphi i &= -A,\\ Sj\varphi j &= -B,\\ Sk\varphi k &= -C,\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

wo A, B, C die Trägheitsmomente bedeuten.

Es folgt hieraus:

$$\varphi\varrho = -\{AiSi\varrho + BjSj\varrho + CkSk\varrho\} \ldots\ldots\ldots (9)$$

Setzen wir $$\eta = i\omega_1 + j\omega_2 + k\omega_3,$$

so zerfällt Gleichung (7) in die drei folgenden Scalargleichungen:

$$\left.\begin{aligned}A\dot{\omega}_1 + (C-B)\omega_2\omega_3 &= 0,\\ B\dot{\omega}_2 + (A-C)\omega_3\dot{\omega}_1 &= 0,\\ C\dot{\omega}_3 + (B-A)\omega_1\omega_2 &= 0.\end{aligned}\right\}$$

Es sind dies die Euler'schen Gleichungen. Man darf nicht übersehen, dass dies nicht die unmittelbaren Bewegungsgleichungen sind. Sie drücken die Bewegungen aus des Endpunktes ω_1, ω_2, ω_3, des Vectors, der der augenblicklichen Drehungsachse im bewegten Körper entspricht, bezogen auf in der Anfangslage des Körpers feste Achsen. Nehmen wir aber an, dass ω_1, ω_2, ω_3 ausgedrückt sind durch w, x, y, z (§ 391) oder durch irgend welche andere Coordinaten, welche den Körper auf feste Achsen beziehen, so *sind* dies die Gleichungen der Bewegung.

Aehnliche Bemerkungen beziehen sich auf die Gleichung, welche ζ bestimmen. Denn setzen wir

$$\zeta = i\omega_1 + j\omega_2 + k\omega_3,$$

so kann (6) zurückgeführt werden auf drei Scalargleichungen von der Form

$$\omega_1 - \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B}\right)\omega_2\omega_3 = 0\,.$$

388.) Die gewöhnliche Form der Euler'schen Gleichung kann leicht aus dem vorhergehenden abgeleitet werden. Denn sei

$$\Phi\varrho = q\varphi(q^{-1}\varrho q)q^{-1}$$

für jedes ϱ; das heisst Φ stelle in Bezug auf die bewegten Hauptachsen dasselbe dar, was φ bedeutet in Bezug auf die Hauptachsen in der Anfangslage des Körpers. Wir haben

$$\begin{aligned}\Phi\dot{\varepsilon} &= q\varphi(q^{-1}\dot{\varepsilon}q)q^{-1} = q\varphi(\dot{\eta})q^{-1}\\ &= q\dot{\xi}q^{-1} \qquad\qquad = qV(\xi\varphi^{-1}\xi)q^{-1}\\ &= -qV(\eta\varphi\eta)q^{-1}\\ &= -V.q\eta\varphi(\eta)q^{-1}\\ &= -V.q\eta q^{-1}q\varphi(q^{-1}\varepsilon q)q^{-1}\\ &= -V.\varepsilon\Phi\varepsilon\,,\end{aligned}$$

und dies ist der gesuchte Ausdruck.

Der einfachste Weg, um zu dieser Gleichung zu gelangen, ist vielleicht, von der unintegrirten Hamilton'schen Gleichung auszugehen. In dem Falle, wo keine Kräfte wirken, ist diese:

$$\Sigma.mV\omega\ddot{\omega} = 0\,,$$

aber aus $\dot{\omega} = V\varepsilon\omega$

folgt $\ddot{\omega} = V\varepsilon\dot{\omega} + V\dot{\varepsilon}\omega$

$$= \omega\varepsilon^2 - \varepsilon S\varepsilon\omega + V\varepsilon\omega\,,$$

so dass $\Sigma.m(V\varepsilon\omega S\varepsilon\omega - \dot{\varepsilon}\omega^2 + \omega S\dot{\varepsilon}\omega) = 0\,.$

Betrachten wir Gleichung (1) und berücksichtigen wir, dass Φ sich nur dadurch von φ unterscheidet, dass ω an Stelle von α gesetzt ist, so sehen wir, dass die letzte Gleichung geschrieben werden kann

$$V\varepsilon\Phi\varepsilon + \Phi\dot{\varepsilon} = 0\,,$$

dieselbe Gleichung wie oben.

Wir haben das erste Verfahren, welches diese Gleichung liefert, angeführt, weil wir durch dasselbe zu interessanten Transformationen gelangen. Aus demselben Grunde führen wir noch zwei weitere Wege an.

Aus (2) folgt $\gamma = q\xi q^{-1}$,

deshalb $0 = \dot{q}q^{-1}.q\xi q^{-1} + q\dot{\xi}q^{-1} - q\xi q^{-1}\dot{q}q^{-1}$,

oder $q\dot{\xi}q^{-1} = 2V.\gamma V\dot{q}q^{-1}$

$$= V\gamma\varepsilon\,.$$

Nach dem ersten Theile dieses Paragraphen und nach (5) von § 382 ist dies wiederum die oben bewiesene Gleichung.

Das folgende Verfahren ist vielleicht eleganter. Es kömmt in Hamilton's *Elements* vor.

Aus (5) des § 382: $\Phi\varepsilon = \gamma$,

hieraus
$$\Phi\dot{\varepsilon} = -\Phi\dot{\varepsilon} = -\Sigma.m(\dot{\omega}V\varepsilon\omega + \omega V\varepsilon\omega)$$
$$= -\Sigma.m\dot{\omega}S\varepsilon\omega$$
$$= -V.\varepsilon\Sigma.m\omega S\varepsilon\omega$$
$$= -V\varepsilon\Phi\varepsilon.$$

389.) Wie man auch zu diesen Gleichungen gelangen mag, so hat Euler schon vor langer Zeit gezeigt, dass Gleichungen, wie diejenigen in § 387 integrirt werden können wie folgt:

Setzt man $2\int\omega_1\omega_2\omega_3 dt = s$,

so folgt $A\omega_1^2 = A\Omega_1^2 + (B-C)s$

und zwei weitere Gleichungen derselben Form.

Hieraus

$$2dt = \frac{ds}{\left(\Omega_1^2 + \frac{B-C}{A}s\right)^{\frac{1}{2}}\left(\Omega_2^2 + \frac{C-A}{B}s\right)^{\frac{1}{2}}\left(\Omega_3^2 + \frac{A-B}{C}s\right)^{\frac{1}{2}}},$$

so dass t ausgedrückt wird in s durch ein elliptisches Integral. Zum Schluss kann dann η oder ξ in t ausgedrückt werden; in einigen der folgenden Untersuchungen, die sich auf q beziehen, wollen wir annehmen, dass dies geschehen ist.

Von dieser oder einer derselben äquivalenten Integration gehen die meisten Untersuchungen aus, die sich auf die weitere Entwickelung dieser Frage beziehen.

390.) Nach § 381 ist γ das Vectormoment der Bewegungsgrösse des starren Körpers, und die kinetische Energie ist

$$-\tfrac{1}{2}\Sigma.m\dot{\omega}^2 = -\tfrac{1}{2}S\varepsilon\gamma.$$

Nun ist $S\varepsilon\gamma = S.q^{-1}\varepsilon q q^{-1}\gamma q = S\eta\xi$,

so dass, wenn keine Kräfte wirken, wir haben

$$S\xi\varphi^{-1}\xi = S\eta\varphi\eta = -h^2.$$

Aus (2) haben wir aber auch

$$T\xi = T\gamma \quad \text{oder} \quad T\varphi\eta = T\gamma,$$

so dass wir erhalten für die Kegel, die in der Anfangslage des Körpers von η und ξ beschrieben werden, also im bewegten Körper von der augenblicklichen Drehungsachse und der Senkrechten zur unveränderlichen Ebene:

$$h^2\xi^2 + \gamma^2 S\xi\varphi^{-1}\xi = 0,$$
$$h^2(\varphi\eta)^2 + \gamma^2 S\eta\varphi\eta = 0.$$

Es setzt dies voraus, dass γ und h constant sind. Wirken Kräfte, so sind diese Grössen Functionen von t, und die Gleichungen der in dem Körper beschriebenen Kegel werden gefunden durch Elimination von t. Das Endresultat, zu welchem ein derartiges Verfahren führt, hängt natürlich ab von der Weise, in welcher t in jene Gleichungen eingeht; man kann also keine allgemeinen Angaben über den Gegenstand machen.

391.) Kehren wir zurück zu unsern Gleichungen, die q bestimmen und betrachten wir zuerst den Fall, dass keine Kräfte wirken; nehmen wir an, η sei wie in § 389 durch elliptische Integrale gegeben, so haben wir folgende Gleichung aufzulösen:

$$q\eta = 2\dot{q},^{*})$$

das heisst, wir haben ein System von vier andern Differentialgleichungen aufzulösen, die schwieriger sind wie die ersten.

Setzen wir wie in § 387:

$$\eta = i\omega_1 + j\omega_2 + k\omega_3,$$

wo ω_1, ω_2, ω_3 bekannte Functionen von t sein sollen, und

$$q = w + ix + jy + kz,$$

so ist dies System:

$$\tfrac{1}{2}dt = \frac{dw}{W} = \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z},$$

---

*) Um eine Vorstellung von der Natur dieser Gleichung zu erhalten, wollen wir dieselbe integriren, indem wir annehmen, η sei ein constanter Vector. Durch Differentiation und Substitution erhalten wir

$$2\ddot{q} = \dot{q}\eta = \tfrac{1}{2}\eta^2 q\,.$$

Hieraus:
$$q = Q_1 \cos\frac{T\eta}{2}t + Q_2 \sin\frac{T\eta}{2}t.$$

Substituiren wir in die gegebene Gleichung, so folgt

$$T\eta\left(-Q_1 \sin\frac{T\eta}{2}t + Q_2\cos\frac{T\eta}{2}t\right) = \left(Q_1\cos\frac{T\eta}{2}t + Q_2\sin\frac{T\eta}{2}t\right)\eta\,.$$

Hieraus
$$T\eta\,.\,Q_2 = Q_1\eta\,,$$
$$-T\eta\,.\,Q_1 = Q_2\eta\,,$$

welche im Grunde dieselbe Gleichung sind. Hieraus

$$q = Q_1\left(\cos\frac{T\eta}{2}t + U\eta\sin\frac{T\eta}{2}t\right)$$
$$= Q_1(U\eta)^{\frac{tT\eta}{\pi}};$$

$q(\ )q^{-1}$ ist in diesem Falle eine Drehung um η als Achse um den Winkel $tT\eta$, zusammengenommen mit einer beliebigen andern Drehung. Jede beliebige Lage kann als Anfangslage genommen werden und $Q_1(\ )Q_1^{-1}$ bringt den Körper in seine Lage zur Zeit $t = 0$.

wo
$$W = -\omega_1 x - \omega_2 y - \omega_3 z,$$
$$X = \omega_1 w + \omega_3 y - \omega_2 z,$$
$$Y = \omega_2 w + \omega_1 z - \omega_3 x,$$
$$Z = \omega_3 w + \omega_2 x - \omega_1 y,$$

oder nach dem Vorschlage von Cayley, um die Symmetrie in Bezug auf die Diagonale zur Geltung zu bringen,

$$X = \quad . \quad \omega_3 y - \omega_2 z + \omega_1 w,$$
$$Y = -\omega_3 x \quad . \quad + \omega_1 z + \omega_2 w,$$
$$Z = \quad \omega_2 x - \omega_1 y \quad . \quad + \omega_3 w,$$
$$W = -\omega_1 x - \omega_2 y - \omega_3 z \quad . \quad .$$

Ein Integral ist hier

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = \text{constans.}$$

Es mag genügen, auf die Möglichkeit einer Integration hingewiesen zu haben, welche, wenn η nicht einen sehr einfachen Werth hat, auf grosse Schwierigkeiten führt.

Die Quaternionenlösung für den Fall, dass η von constanter Länge ist und sich gleichförmig in einem geraden Kegel bewegt, werden wir später geben.

392.) Eliminiren wir η, so haben wir zu integriren

$$q\varphi^{-1}(q^{-1}\gamma q) = 2\dot{q},$$

so dass theoretisch eine Gleichung genügt. Aber in Folge der gegenwärtigen unvollständigen Entwickelung der Quaternionenrechnung müssen wir, um die Integration auszuführen, die Quaternionengleichung auf ein System von vier gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführen. Es ist von Interesse, diese Gleichungen zu bilden.

Setzt man
$$q = w + xi + yj + zk,$$
$$\gamma = ia + jb + kc,$$

so führt man die gegebene Gleichung durch gewöhnliche Quaternionenmultiplication zurück auf folgendes System

$$\frac{dt}{2} = \frac{dw}{W} = \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z},$$

wo

$W = x\mathfrak{A} - y\mathfrak{B} - z\mathfrak{C}$ oder $X = \quad . \quad y\mathfrak{C} - z\mathfrak{B} + w\mathfrak{A},$
$X = w\mathfrak{A} + y\mathfrak{C} - z\mathfrak{B}$ $Y = -x\mathfrak{C} \quad . \quad + z\mathfrak{A} + w\mathfrak{B},$
$Y = w\mathfrak{B} + z\mathfrak{A} - x\mathfrak{C}$ $Z = \quad x\mathfrak{B} - y\mathfrak{A} \quad . \quad + w\mathfrak{C},$
$Z = w\mathfrak{C} + x\mathfrak{B} - y\mathfrak{A}$ $W = -x\mathfrak{A} - y\mathfrak{B} - z\mathfrak{C} \quad . \quad ,$

und

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{A}[a(w^2 - x^2 - y^2 - z^2) + 2x(ax + by + cz) + 2w(bz - cy)],$$
$$\mathfrak{B} = \frac{1}{B}[b(w^2 - x^2 - y^2 - z^2) + 2y(ax + by + cz) + 2w(cx - az)],$$
$$\mathfrak{C} = \frac{1}{C}[c(w^2 - x^2 - y^2 - z^2) + 2z(ax + by + cz) + 2w(ay - bx)],$$

W, X, Y, Z sind also *homogene* Functionen dritten Grades von w, x, y, z.

Der einfachste Weg um zu diesen Gleichungen zu gelangen ist wohl, die Gruppe § 385 sofort durch w, x, y, z auszudrücken, anstatt von den Gleichungen auszugehen, aus welchen ξ und η eliminirt wurden.

Wir sehen auf diese Weise, dass

$$\eta = i\mathfrak{A} + j\mathfrak{B} + k\mathfrak{C}.$$

Ein Integral dieser Gleichungen ist

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = \text{const.},$$

die Annahme, die wir bei der ganzen Untersuchung festhielten. Wir sehen nämlich, dass

$$wW + xX + yY + zZ = 0,$$

identisch erfüllt ist, und dies führt zu dem obigen Integral.

Diese Gleichungen sind bemerkenswerth einerseits wegen der Homogenität der Nenner, anderseits weil sie das Mittel bieten (was wie es scheint, nicht gesucht wurde), diese bekannte Aufgabe unmittelbar zu lösen, das heisst ohne die vorhergehende Integration der Euler'schen Gleichungen (§ 387).

Ein System von Gleichungen, das mit diesen Gleichungen identisch, aber nicht homogen ist (dieselben enthalten die $\varkappa$, λ, μ, ν § 359, an Stelle der w, x, y, z), hat Cayley gegeben (Camb. and Dub. Math. Journal Vol. I. 1846) und vollständig integrirt (auf Quadraturen zurückgeführt) unter der Annahme, dass die Euler'schen Gleichungen zuvor integrirt wurden. (Man vergleiche § 391.)

Cayley's Methode kann noch leichter auf obige Gleichungen, als auf seine eigenen angewendet werden. Ich überlasse es deshalb dem Leser, dies durchzuführen. Es zeigt sich, dass wie in § 391 die $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ den ω_1, ω_2, ω_3 des η-Typus in § 387 entsprechen.

393.) In Bezug auf die Formeln für Richtungscosinus in § 359 ist es von Interesse zu bemerken, dass wir schreiben können

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{A}[a(w^2 + x^2 - y^2 - z^2) + 2b(xy + wz) + 2c(xz - wy)],$$
$$\mathfrak{B} = \frac{1}{B}[2a(xy - wz) + b(w^2 - x^2 + y^2 - z^2) + 2c(yz + wx)],$$
$$\mathfrak{C} = \frac{1}{C}[2a(xz + wy) + 2b(yz - wx) + c(w^2 - x^2 - y^2 + z^2)].$$

Diese Ausdrücke vereinfachen sich durch die gewöhnliche Annahme, dass einer der festen Einheits-Vectoren (i z. B.) auf der unveränderlichen Ebene senkrecht stehe. Es kömmt dies darauf hinaus, die Anfangslage einer Geraden des Körpers festzusetzen; dies liefert

$$b = 0, \qquad c = 0.$$

394.) Wirken Kräfte, so ist γ veränderlich und die Grössen a, b, c werden im allgemeinen alle die Variabeln w, x, y, z, t enthalten, so dass die Gleichungen in dem vorigen Abschnitte weit complicirter werden. Der Typus bleibt derselbe, wenn γ nur t enthält; enthält es auch q, so müssen wir die Gleichung differentiiren, nachdem wir sie auf die Form gebracht haben:

$$\gamma = 2q\varphi(q^{-1}\dot{q})q^{-1},$$

wir erhalten so die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\psi = 4V.\dot{q}\varphi(q^{-1}\dot{q})q^{-1} + 2q\varphi(V.q^{-1}\ddot{q})q^{-1}.$$

Wenn wir berücksichtigen, dass, weil $q^{-1}\dot{q}$ ein Vector ist,

$$S.q^{-1}\ddot{q} = (q^{-1}\dot{q})^2.$$

Obgleich diese Gleichung merkwürdig einfach ist, so ist dieselbe doch bei dem jetzigen Stande der Quaternionenrechnungen nur in gewissen speciellen Fällen zu lösen.

395.) Eine andere Methode, an diese Aufgabe heranzutreten die auf den ersten Blick gänzlich verschieden scheint von der des § 383, in Wirklichkeit aber identisch mit derselben ist, ist die lineare Vectorfunction aufzusuchen, welche die homogene Deformation ausdrückt, die der Körper erleiden muss, um von seiner Anfangslage in die Lage zur Zeit t zu gelangen.

Es sei $$\omega = \chi\alpha,$$

α ist wie in § 383 die Anfangslage eines Vectors des Körpers, ω dessen Lage zur Zeit t. In diesem Falle ist χ eine lineare Vectorfunction (man sehe § 360).

Ist nun ω_1 der Vector eines andern Punktes, der ursprünglich α_1 war, so haben wir

$$S\omega\omega_1 = S.\chi\alpha\chi\alpha_1 = S\alpha\alpha_1,$$

(ein specieller Fall hiervon ist

$$T\omega = T\chi\alpha = T\alpha),$$

und $$V\omega\omega_1 = V.\chi\alpha\chi\alpha_1 = \chi V\alpha\alpha_1.$$

Dies sind nothwendige Eigenschaften der Deformationsfunction, die darauf beruhen, dass in diesem Falle das System ein starres ist.

396.) Die kinematische Gleichung

$$\dot{\omega} = V\varepsilon\omega$$

wird $$\dot{\chi}\alpha = V.\varepsilon\chi\alpha,$$

(die Function $\dot{\chi}$ entsteht aus χ durch Differentiation in Bezug auf t).

Hamilton's kinematische Gleichung

$$\Sigma . m\omega V\varepsilon\omega = \gamma$$

wird

$$\Sigma . m\chi\alpha V . \varepsilon\chi\alpha = \gamma .$$

Dies kann man schreiben

$$\Sigma . m(\chi\alpha S . \varepsilon\chi\alpha - \varepsilon\alpha^2) = \gamma$$

oder

$$\Sigma . m(\alpha S . \alpha\chi'\varepsilon - \chi^{-1}\varepsilon . \alpha^2) = \chi^{-1}\gamma .$$

wo χ' die Conjugirte von χ ist.

Da aber

$$S . \chi\alpha\chi\alpha_1 = S\alpha\alpha_1 ,$$

so haben wir

$$S\alpha\alpha_1 = S . \alpha\chi'\chi\alpha_1$$

für beliebige α und α_1, so dass

$$\chi' = \chi^{-1} .$$

Hieraus:

$$\Sigma . m(\alpha S . \alpha\chi^{-1}\varepsilon - \chi^{-1}\varepsilon . \alpha^2) = \chi^{-1}\gamma ,$$

oder nach § 383

$$\varphi\chi^{-1}\varepsilon = \chi^{-1}\gamma .$$

397.) Wir erhalten also, entsprechend den Gleichungen in §§ 383, 384,

$$\chi^{-1}\varepsilon = \eta ,$$

$$\chi^{-1}\gamma = \xi ,$$

und das frühere Resultat

$$\dot{\chi}\alpha = V . \varepsilon\chi\alpha$$

wird

$$\dot{\chi}\alpha = V . \chi\eta\chi\alpha = \chi V\eta\alpha .$$

Diese Gleichung bestimmt χ, wenn η als bekannt vorausgesetzt wird.

Um η zu bestimmen, bemerken wir, dass

$$\varphi\eta = \xi ,$$

und

$$\dot{\xi} = \dot{\chi^{-1}}\gamma .$$

Aber

$$\chi\chi^{-1}\alpha = \alpha ,$$

so dass

$$\dot{\chi}\chi^{-1} + \chi\dot{\chi^{-1}}\alpha = 0 .$$

Hieraus

$$\dot{\xi} = -\chi^{-1}\dot{\chi}\chi^{-1}\gamma$$

$$= -V . \eta\chi^{-1}\gamma = V\xi\eta = V . \xi\varphi^{-1}\xi ,$$

oder

$$\varphi\dot{\eta} = -V\eta\varphi\eta .$$

Dies sind die Gleichungen, zu denen wir schon früher gelangten. Haben wir η aus der letzten gefunden, so bleibt χ zu bestimmen aus der Bedingung

$$\chi^{-1}\dot{\chi}\alpha = V\eta\alpha .$$

398.) Wir hätten auch η eliminiren können, um eine Gleichung zu erhalten, die nur χ enthalten hätte, entsprechend der Gleichung

in § 385. Zu diesem Zwecke haben wir:

$$\eta = \varphi^{-1}\xi = \varphi^{-1}\chi^{-1}\gamma,$$

so dass schliesslich wird:

$$\chi^{-1}\dot{\chi}\alpha = V.\varphi^{-1}\chi^{-1}\gamma\alpha$$

oder
$$\dot{\widehat{\chi^{-1}}}\alpha = V.\chi^{-1}\alpha\varphi^{-1}\chi^{-1}\gamma.$$

Dieser Ausdruck kann aus der vorhergehenden Gleichung gebildet werden, indem man $\chi^{-1}\alpha$ statt α setzt, und den Werth von $\dot{\widehat{\chi^{-1}}}$ berücksichtigt, der in dem vorhergehenden Paragraphen gegeben wurde.

399.) Obgleich das Verfahren nur eine versteckte Form desjenigen in §§ 383, 385 ist, und die Schlussgleichungen nicht so leicht zu integriren sind als jene, so haben wir es dennoch angeführt, um zu zeigen, wie frei man mit den symbolischen Functionaloperatoren umgehen kann, ohne Gefahr zu laufen zu irren.

Es wäre aber von Interesse, diese Aufgabe von diesem Standpunkte aus mit Hilfe der alten analytischen Methoden auszuarbeiten; man würde sicherlich einige neue Formen von längst bekannten Gleichungen und einige nützliche Transformationen erhalten.

400.) Zur Verification wollen wir versuchen, von der Endgleichung, in χ allein, des § 398 überzugehen zu derjenigen in q allein des § 385.

Wir haben $$\omega = q\alpha q^{-1} = \chi\alpha$$

und dies liefert den Zusammenhang zwischen q und χ.

[Es zeigt dies z. B. dass, da

$$S.\beta\chi\alpha = S.\alpha\chi'\beta,$$

während $$S.\beta\chi\alpha = S.\beta q\alpha q^{-1} = S.\alpha q^{-1}\beta q,$$

wir haben $$\chi'\beta = q^{-1}\beta q,$$

und deshalb $$\chi\chi'\beta = q(q^{-1}\beta q)q^{-1} = \beta$$

oder $$\chi' = \chi^{-1}$$ wie oben.]

Durch Differentiation folgt:

$$\dot{q}\alpha q^{-1} - q\alpha q^{-1}\dot{q}q^{-1} = \dot{\chi}\alpha.$$

Hieraus $$\chi^{-1}\dot{\chi}\alpha = q^{-1}\dot{q}\alpha - \alpha q^{-1}\dot{q}$$
$$= 2V.V(q^{-1}\dot{q})\alpha;$$

und $$\varphi^{-1}\chi^{-1}\gamma = \varphi^{-1}(q^{-1}\gamma q),$$

so dass die Gleichung des § 398 wird

$$2V.V(q^{-1}\dot{q})\alpha = V.\varphi^{-1}(q^{-1}\gamma q)\alpha,$$

oder, da α einen beliebigen Werth haben kann,

$$2V.q^{-1}\dot{q} = \varphi^{-1}(q^{-1}\gamma q);$$

setzen wir $$Tq = \text{const.},$$
wie anfangs angenommen wurde, so können wir jene Gleichung schreiben
$$2\dot{q} = q\varphi^{-1}(q^{-1}\gamma q),$$
wie in § 385.

401.) *Die Gleichung der Präcession und Nutation aufzustellen.*

Es sei σ der Vector vom Schwerpunkte der Erde aus nach einem Theilchen m ihrer Masse; ϱ sei der Vector des Körpers, welcher die Störung veranlasst; die Masse desselben sei M. Das Vectormoment des hervorgebrachten Kräftepaares ist:

$$\begin{aligned} &M\Sigma . m V . \sigma \frac{U(\varrho-\sigma)}{T^2(\varrho-\sigma)} \\ &= M\Sigma . m \frac{V\sigma\varrho}{T^3(\varrho-\sigma)} \\ &= M\Sigma \cdot \frac{mV\sigma\varrho}{T^3\varrho} \frac{1}{\left(1+\frac{2S\sigma\varrho}{T^2\varrho}+\frac{T^2\sigma}{T^3\varrho}\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= M\Sigma \cdot \frac{mV\sigma\varrho}{T^3\varrho}\left(1-\frac{3S\sigma\varrho}{T^2\varrho}+\ldots.\right), \end{aligned}$$

weitere Glieder sind unnöthig, da in den in der Natur vorkommenden Fällen $\frac{T\sigma}{T\varrho}$ sehr klein ist.

Da σ vom Schwerpunkte ausgeht, so ist
$$\Sigma . m\sigma = 0.$$
Wie in § 383 können wir setzen
$$\varphi\varrho = \Sigma . m(\sigma S\sigma\varrho - \sigma^2\varrho).$$
Der Vector des Kräftepaares ist also:
$$\frac{3M}{T^5\varrho} V . \varrho\varphi\varrho .$$
Beziehen wir dies auf Coordinaten, die sich mit dem Körper bewegen, so wird φ zu Φ wie in § 388, und § 388 liefert
$$\Phi\varepsilon = \gamma = 3M\int^{\cdot} \frac{V . \varrho\Phi\varrho}{T^5\varrho} dt.$$
Vereinfachen wir Φ durch die Annahme, die Erde habe zwei Hauptachsen von gleichen Trägheitsmomenten, so folgt:
$$B\varepsilon - (A-B)\alpha S\alpha\varepsilon = \text{Vector const.} + 3M(A-B)\int^{\cdot} \frac{V\alpha\varrho S\alpha\varrho}{T^5\varrho} dt.$$
Dies liefert $$S\alpha\varepsilon = \text{const.} = \Omega;$$
hieraus $$\varepsilon = -\Omega\alpha + \alpha\dot{\alpha},$$
und schliesslich
$$BV\alpha\ddot{\alpha} - A\Omega\dot{\alpha} = \frac{3M}{T^5\varrho}(A-B)V\alpha\varrho S\alpha\varrho .$$

Die merkwürdigste Eigenschaft dieser Gleichung ist, dass die *Form* der Lösung vollkommen sich ändert, nicht modificirt wird, wie in den gewöhnlichen Fällen gestörter Bewegung, je nach der Natur des Werthes von ϱ.

Verschwindet das Glied auf der rechten Seite, so haben wir eine Gleichung, die, im Falle der Erde, das Rollen eines Kegels darstellen würde, der in der Erde festliegt auf einem andern im Raume festliegenden Kegel; beide Kegel wären dabei von sehr kleinem Winkel.

Ist ϱ endlich, aber constant, so haben wir einen Fall sehr ähnlich dem eines Kreisels, dessen Achse in einem Kegel um ϱ sich bewegt.

Nehmen wir aber den Ausdruck an

$$\varrho = r(j \cos mt + k \sin mt),$$

(welcher eine mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchmessene Kreisbahn darstellt,) so bewegt sich α in einem Kegel um dem Vector i, senkrecht auf der Ebene, in welcher ϱ liegt. (Trans. R. S. E. 1868—69.)

402.) *Die Gleichung eines einfachen Pendels aufzustellen, unter Berücksichtigung der Bewegung der Erde.*

Wir legen den Anfangspunkt in den Mittelpunkt der Erde; a sei der Vector des Aufhängepunktes, λ dessen Neigung zur Ebene des Aequators, a der Radius der Erde, der nach jenem Punkte gezogen ist; die Einheits-Vectoren i, j, k sollen im Raume festliegen, so dass i der Drehungsachse der Erde parallel ist. Ist ω nun die Winkelgeschwindigkeit der Drehung, dann ist

$$\alpha = a[i \sin\lambda + (j \cos\omega t + k \sin\omega t)\cos\lambda] \quad \ldots\ldots (1)$$

hieraus:
$$\dot{\alpha} = a\omega(-j \sin\omega t + k \cos\omega t)\cos\lambda$$
$$= \omega V i\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

und dem entsprechend

$$\ddot{\alpha} = \omega V i\dot{\alpha} = -\omega^2(\alpha - ai \sin\lambda) \ldots\ldots\ldots (3)$$

403.) Es sei ϱ der Vector der Masse m des Pendels, bezogen auf den Aufhängepunkt, R die Spannung des Fadens, α_1 die Richtung der reinen Schwere; es ist dann

$$m(\ddot{\alpha} + \ddot{\varrho}) = -mgU\alpha_1 - RU\varrho \ldots\ldots\ldots (4)$$

dies kann geschrieben werden

$$V\varrho\ddot{\alpha} + V\varrho\ddot{\varrho} = \frac{g}{T\alpha_1} V\alpha_1\varrho \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

da r, die Länge der Schnur, constant ist, haben wir noch hinzuzufügen

$$T\varrho = r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

und die Bewegungsgleichungen sind vollständig.

404.) Diese beiden Gleichungen (5) und (6) enthalten alle möglichen Fälle der Bewegung, von den kleinsten Schwingungen zu den schnellsten Drehungen um den Aufhängepunkt, so dass es nöthig ist, zu deren Lösung verschiedene Methoden in den verschiedenen Fällen anzuwenden. Wir wollen hier nur den gewöhnlichen Foucault'schen Fall behandeln, mit der üblichen Annäherung.

405.) Wir vernachlässigen Glieder, in welchen ω^2 vorkommt. Wir schreiben also

$$\ddot{\alpha} = 0,$$

und setzen α an Stelle von α_1, da der Unterschied von der elliptischen Form der Erde herrührt. Berücksichtigen wir dies, so haben wir

$$\varrho = -\frac{r}{a}\alpha + \varpi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

wo nach (6)
$$S\alpha\varpi = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

und Glieder der Ordnung ϖ^2 vernachlässigt werden.

Mit (7) wird (5)

$$-\frac{r}{a} V\alpha\ddot{\varpi} = \frac{g}{r} V\alpha\varpi;$$

schreiben wir
$$\frac{g}{r} = n^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

so folgt
$$V\alpha(\ddot{\varpi} + n^2\varpi) = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Die beiden Vectoren $ai - \alpha\sin\lambda$ und $Vi\alpha$ haben gleiche Tensoren; der erste ist parallel der Geraden, die horizontal nach *Norden* gezogen ist, vom Aufhängepunkte aus; die zweite horiozontal nach *Osten.*

Es sei nun

$$\varpi = x(ai - \alpha\sin\lambda) + y\,Vi\alpha \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

da x und y sehr klein sein sollen, so ist dies nicht im Widerspruche mit (6). Hieraus und aus (2) und (3) erhalten wir, bei Weglassen von ω^2,

$$\dot{\varpi} = \dot{x}(ai - \alpha\sin\lambda) + \dot{y}\,Vi\alpha - x\omega\sin\lambda\,Vi\alpha - y\omega(\alpha - ai\sin\lambda)$$
$$\ddot{\varpi} = \ddot{x}(ai - \alpha\sin\lambda) + \ddot{y}\,Vi\alpha - 2\dot{x}\omega\sin\lambda\,Vi\alpha - 2\dot{y}\omega(\alpha - ai\sin\lambda).$$

Hiernach wird (10)

$$V\alpha[\ddot{x}(ai - \alpha\sin\lambda) + \ddot{y}\,Vi\alpha - 2\dot{x}\omega\sin\lambda\,Vi\alpha - 2\dot{y}\omega(\alpha - ai\sin\lambda)$$
$$+ n^2x(ai - \alpha\sin\lambda) + n^2y\,Vi\alpha] = 0.$$

Berücksichtigen wir, dass

$$V.\alpha\,Vi\alpha = a(ai - \alpha\sin\lambda),$$

so folgt

$$(-\ddot{x} - 2\dot{y}\omega\sin\lambda - n^2x)aVi\alpha + (\ddot{y} - 2\dot{x}\omega\sin\lambda + n^2y)a(ai - \alpha\sin\lambda) = 0.$$

Dies liefert
$$\left.\begin{aligned}\ddot{x} + n^2x + 2\omega\dot{y}\sin\lambda &= 0,\\ \ddot{y} + n^2y - 2\omega\dot{x}\sin\lambda &= 0.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

Dies sind die gewöhnlichen Gleichungen; wir lösen dieselben wie folgt.

Wir führen ein Coordinatensystem ein, das sich in der Horizontalebene des Aufhängepunktes dreht; die Richtung der Bewegung gehe von der positiven x-Achse (Norden) nach der positiven y-Achse (Osten), die Winkelgeschwindigkeit sei Ω, so dass

$$\left.\begin{aligned} x &= \xi \cos \Omega t - \eta \sin \Omega t, \\ y &= \xi \sin \Omega t + \eta \cos \Omega t. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Vernachlässigen wir die Glieder in Ω^2 und in $\omega\Omega$ (das Resultat rechtfertigt dies, man sehe Gleichung (5)), so folgt:

$$\left.\begin{aligned} (\ddot{\xi} + n^2\xi)\cos\Omega t - (\ddot{\eta} + n^2\eta)\sin\Omega t - 2\dot{y}(\Omega - \omega\sin\lambda) &= 0, \\ (\ddot{\xi} + n^2\xi)\sin\Omega t + (\ddot{\eta} + n^2\eta)\cos\Omega t + 2\dot{x}(\Omega - \omega\sin\lambda) &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots (14)$$

Setzen wir

$$\Omega = \omega \sin\lambda \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\xi} + n^2\xi &= 0, \\ \ddot{\eta} + n^2\eta &= 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

die bekannten Gleichungen der elliptischen Bewegung um einen Kraftmittelpunkt im Mittelpunkte der Ellipse. (Proc. R. S. E. 1869.)

406.) *Eine spiegelnde Fläche zu construiren, welche Strahlen, die von einem Punkte ausgehen, so reflectirt, dass dieselben nach der Spiegelung gleichmässig divergiren, aber horizontal sind.*

Mit Hilfe der bekannten Eigenschaft einer spiegelnden Fläche erhalten wir leicht die Gleichung

$$S.d\varrho\left(\frac{\beta + \alpha V\alpha\varrho}{\varrho}\right)^{\frac{1}{2}}\varrho = 0.$$

Aus Hamilton's Theorie der Strahlensysteme erhalten wir die zweite Gleichung:

$$T\varrho - T(\beta + \alpha V\alpha\varrho) = \text{const.}$$

Den Zusammenhang zwischen beiden Gleichungen kann man zeigen wie folgt.

Es seien ω und τ zwei beliebige Vectoren, deren Tensoren gleich sind. Dann ist:

$$\left(\frac{\tau + \omega}{\tau}\right)^2 = 1 + 2S\omega\tau^{-1} + (\omega\tau^{-1})^2$$
$$= 2\omega\tau^{-1}(1 + S\omega\tau^{-1}).$$

Bis auf einen Scalarfactor haben wir also

$$\left(\frac{\omega}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\tau + \omega}{\tau}.$$

Setzen wir nun $\omega = U(\beta + \alpha V\alpha\varrho)$ und $\tau = U\varrho$, so folgt aus der ersten der obigen Gleichungen:

$$S.d\varrho\,[U\varrho + U(\beta + \alpha V\alpha\varrho)] = 0;$$

aber $$d(\beta + \alpha V\alpha\varrho) = \alpha V\alpha d\varrho = -d\varrho - \alpha S\alpha d\varrho$$

und $$S.\alpha(\beta + \alpha V\alpha\varrho) = 0,$$

so dass wir schliesslich erhalten:

$$S.d\varrho U\varrho - S.d(\beta + \alpha V\alpha\varrho)U(\beta + \alpha V\alpha\varrho) = 0,$$

dies ist das Differential der zweiten der obigen Gleichungen. Ein merkwürdiger specieller Fall ist ein parabolischer Cylinder, wie man leicht geometrisch sehen kann. Die allgemeine Fläche hat einen parabolischen Schnitt in der Ebene α, β; und einen hyperbolischen in der Ebene von β und $\alpha\beta$.

Man sieht, dass dies nur ein einzelner Fall einer grossen Classe von integrirbaren Scalarfunctionen ist, deren allgemeiner Typus ist

$$S.d\varrho\left(\frac{\sigma - \varrho}{\varrho}\right)^{\frac{1}{2}}\varrho = 0,$$

die Gleichung der spiegelnden Fläche; während

$$S(\sigma - \varrho)d\sigma = 0$$

die Gleichung der reflectirten Welle ist. Das Integral der ersten Gleichung erhält man mit Hilfe der zweiten in der Form

$$T\varrho \pm T(\sigma - \varrho) = \text{const.}*$$

407.) Wir wollen jetzt Fresnel's Theorie der doppelten Brechung betrachten, doch nur um zu zeigen, wie die Quaternionen die Rechnung vereinfachen, keineswegs um die Zulässigkeit der physikalischen Annahme zu prüfen.

Es sei $t\omega$ die Vectorverrückung eines Theilchens des Aethers mit der Bedingung

$$\omega^2 = -1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

so ist die Restitutionskraft nach Fresnel's Annahme

$$t(a^2 iSi\omega + b^2 jSj\omega + c^2 kSk\omega) = t\varphi\omega,$$

indem wir die Bezeichnungsweise von Kapitel V anwenden.

Die Function φ ist augenscheinlich selbstconjugirt. a^2, b^2, c^2 sind optische Constanten, die von der Natur des krystallinischen Mittels abhängen und von der Farbe des Lichtes; man kann dieselben als gegeben ansehen.

Die zweite Annahme Fresnel's ist, dass der Aether incompressibel ist und dass also Schwingungen senkrecht zur Wellenebene nicht vorkommen. Ist α die Einheits-Normale einer ebenen Welle in dem Krystall, so haben wir

$$\alpha^2 = -1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

und $$S\alpha\omega = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

---

* Proc. R. S. E. 1870—71.

Diesen Gleichungen haben wir hinzuzufügen

$$\omega^{-1} V \omega \varphi \omega \parallel \alpha$$

oder
$$S . \alpha \omega \varphi \omega = 0 . \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Diese Gleichung (4) drückt Fresnel's zweite Annahme aus. Man kann dieselbe aber auch deuten wie folgt:

Die Normale der Wellenfläche, die Richtung der Schwingung und die Restitutionskraft liegen in einer Ebene.

408.) Wird den Gleichungen (3) und (4) durch ω genügt, so wird ihnen auch genügt durch $\omega\alpha$, so dass also die Ebene (3) den Kegel (4) in zwei aufeinander senkrecht stehenden Geraden schneidet. Das heisst, *für jede Wellenfronte gibt es zwei Schwingungsrichtungen und diese stehen senkrecht aufeinander.*

409.) Das Quadrat der normalen Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer ebenen Welle ist proportional der Componente der Restitutionskraft, in Richtung der Schwingung, dividirt durch die Grösse der Verrückung.

Also
$$v^2 = S \omega \varphi \omega .$$

Fresnel's Wellenfläche ist also die Umhüllende der Ebene

$$S \alpha \varrho = \sqrt{S \omega \varphi \omega} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

unter den Bedingungen
$$\omega^2 = -1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$\alpha^2 = -1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$S \alpha \omega = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$
$$S . \alpha \omega \varphi \omega = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

So verwickelt diese Aufgabe erscheint, so einfach ist sie. Aus (3) und (4) folgt:

$$x \omega = V . \alpha V \alpha \varphi \omega .$$

Operiren wir mit $S . \omega$:

$$-x = -S \omega \varphi \omega = -v^2 .$$

Deshalb
$$(\varphi + v^2) \omega = -\alpha S \alpha \varphi \omega ,$$

und
$$S . \alpha (\varphi + v^2)^{-1} \alpha = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Wir bemerken, dass *diese Gleichung die normale Geschwindigkeit der beiden Strahlen gibt, deren Fronten senkrecht auf α stehen.*

In Cartesischen Coordinaten ist dies die bekannte Gleichung

$$\frac{l^2}{a^2 - v^2} + \frac{m^2}{b^2 - v^2} + \frac{n^2}{c^2 - v^2} = 0 .$$

Durch Elimination von ω wird die Gleichung

$$S . \alpha (\varphi + v^2)^{-1} \alpha = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$
$$v = -S \alpha \varrho \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$
$$\alpha^2 = -1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Diese liefern sofort nach § 309

$$(\varphi + v^2)^{-1}\alpha + v\varrho S\alpha(\varphi + v^2)^{-2}\alpha = h\alpha .$$

Operirt man mit $S.\alpha$, so folgt

$$v^2 S\alpha(\varphi + v^2)^{-2}\alpha = h .$$

Substituirt man für h und berücksichtigt, dass

$$S.\alpha(\varphi + v^2)^{-1}\alpha = -T^2(\varphi + v^2)^{-1}\alpha ,$$

da φ selbstconjugirt ist, so erhält man

$$v(\varphi + v^2)^{-1}\alpha = \frac{v\alpha - \varrho}{\varrho^2 + v^2} .$$

Ordnet man von neuem, so folgt

$$v(\varphi + v^2)^{-1}\alpha = (\varphi - \varrho^2)^{-1}\varrho .$$

Hieraus $$(\varphi - \varrho^2)^{-1}\varrho = \frac{v\alpha - \varrho}{\varrho^2 + v^2} .$$

Operiren wir hierauf mit $S.\varrho$, so erhalten wir

$$S\varrho(\varphi - \varrho^2)^{-1}\varrho = -1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

die gesuchte Gleichung.

[Es ist eine gute Uebung, die zehn letzten Gleichungen in Cartesische Coordinaten zu übertragen. Man wird auf diese Weise fast genau den Weg wiederholen, auf welchem Archibald Smith* zuerst zu einer einfachen und symmetrischen Methode der Elimination gelangte. Obiges Verfahren ist, wie wir sehen werden, noch lange nicht das kürzeste und einfachste, zu welchem die Quaternionen führen.]

410.) Die Cartesische Form der Gleichung (7) ist nicht die gewöhnliche. Sie ist

$$\frac{x^2}{a^2 - r^2} + \frac{y^2}{b^2 - r^2} + \frac{z^2}{c^2 - r^2} = -1 .$$

Schreibt man aber (7) in der Form

$$S.\varrho\frac{\varrho^2}{\varphi - \varrho^2}\varrho = -\varrho^2$$

oder

$$S.\varrho\frac{\varphi}{\varphi - \varrho^2}\varrho = 0 ,$$

so erhalten wir hieraus den bekannten Ausdruck

$$\frac{a^2x^2}{a^2 - r^2} + \frac{b^2y^2}{b^2 - r^2} + \frac{c^2z^2}{c^2 - r^2} = 0 .$$

Dieser Quaternionengleichung kann man auch eine der beiden folgenden Formen geben:

$$T\left(\frac{\varphi}{\varphi - \varrho^2}\right)^{\frac{1}{2}}\varrho = 0$$

oder

$$T(\varrho^{-2} - \varphi^{-1})^{-\frac{1}{2}}\varrho = 0 .$$

* Cambridge Phil. Trans. 1835.

411.) Wenden wir die Ergebnisse der §§ 171, 172 an, so können wir eine ganze Reihe neuer Formen einführen. Wir beschränken uns auf die allereinfachsten; der Leser kann leicht noch andere Formen untersuchen mit Hilfe eines Verfahrens, das dem jetzt folgenden vollkommen entspricht.

Schreiben wir die Gleichung der Welle

$$S\varrho(\varphi^{-1}+g)^{-1}\varrho = 0,$$

wo wir haben

$$g = -\varrho^{-2},$$

so sehen wir, dass dieselbe verwandelt werden kann in

$$S\varrho(\varphi^{-1}+h)^{-1}\varrho = 0,$$

wenn

$$mS\varrho\varphi\varrho = gh\varrho^2 = -h.$$

Die neue Form ist

$$S\varrho(\varphi^{-1}-mS\varrho\varphi\varrho)^{-1}\varrho = 0. \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Hier ist $m = \frac{1}{a^2b^2c^2}$, $\quad S\varrho\varphi\varrho = a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2,$

und die Gleichung der Welle in Cartesischen Coordinaten ist, wenn

$$r_1{}^2 = a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2,$$

$$\frac{x^2}{b^2c^2-r_1{}^2}+\frac{y^2}{c^2a^2-r_1{}^2}+\frac{z^2}{a^2b^2-r_1{}^2} = 0.$$

412.) Mit Hilfe von Gleichung (1) des vorhergehenden Paragraphen können wir leicht Plücker's Satz beweisen: *Die Wellenfläche ist ihre eigene Reciproke in Bezug auf das Ellipsoid, dessen Gleichung ist*

$$S\varrho\varphi^{\frac{1}{2}}\varrho = \frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Die Gleichung der Contactebene der Tangenten an diese Fläche, die vom Punkte, dessen Vector ϱ ist, ausgehen, ist

$$S\omega\varphi^{\frac{1}{2}}\varrho = \frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Die Reciproke dieser Ebene in Bezug auf die Einheitskugel, die um den Anfangspunkt beschrieben ist, hat den Vector σ, wo

$$\sigma = \sqrt{m}\,.\,\varphi^{\frac{1}{2}}\varrho,$$

hieraus folgt:

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{m}}\varphi^{-\frac{1}{2}}\sigma.$$

Substituiren wir dies in die Gleichung der Welle, so erhalten wir für die Reciproke (in Bezug auf die Einheitskugel) der Reciproken der Welle in Bezug auf obiges Ellipsoid

$$S\,.\,\sigma\left(\varphi-\frac{1}{m}S\sigma\varphi^{-1}\sigma\right)\sigma = 0.$$

Dies unterscheidet sich von der Gleichung (1) des vorigen Paragraphen allein dadurch, dass φ^{-1} an Stelle von φ steht, und in

Uebereinstimmung hiermit $\frac{1}{m}$ statt m. Diese Gleichung stellt also die Indexfläche dar. Die gesuchte Reciproke der Welle in Bezug auf das Ellipsoid ist also die Welle selbst.

413.) Hamilton hat eine ausserordentlich einfache Untersuchung der Form der Gleichung der Wellenfläche in seinen „Elements“ p. 736 gegeben, die der Leser mit Nutzen zu Rathe ziehen wird. Was folgt ist der Hauptsache nach dasselbe, aber mehrere Zwischenrechnungen, die der Geübtere nicht hinzuschreiben braucht, haben wir beibehalten, um dem Anfänger das Verständniss zu erleichtern.

Es sei $$S\mu\varrho = -1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
die Gleichung einer beliebigen Tangentialebene der Welle, d. h. einer beliebigen Wellenfronte. μ ist dann der Vector der reciproken Fortpflanzungsgeschwindigkeit; die normale Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist also $\frac{1}{T\mu}$. Ist also ω die Vectorrichtung der Verschiebung, dann ist $\mu^{-2}\omega$ die wirkende Componente der Restitutionskraft.

Bezeichnet $\varphi\omega$ die ganze Restitutionskraft, so haben wir
$$\varphi\omega - \mu^{-2}\omega \parallel \mu,$$
oder
$$\omega \parallel (\varphi - \mu^{-2})^{-1}\mu,$$
und da ω in der Ebene der Wellenfronte liegt,
$$S\mu\omega = 0,$$
oder
$$S\mu(\varphi - \mu^{-2})^{-1}\mu = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
Dies ist eigentlich Gleichung (6) des § 409. Hier tritt sie aber auf als Gleichung der *Indexfläche*, die Polarreciproke der Welle in Bezug auf die Einheitskugel, deren Mittelpunkt im Anfangspunkte liegt. Der optische Theil der Aufgabe ist nun gelöst, und es bleibt noch übrig das geometrische Verfahren des § 311.

414.) Gleichung (2) des vorigen Paragraphen kann nach dem Verfahren des § 410 umgeformt werden in
$$S\mu(\mu^2 - \varphi^{-1})^{-1}\mu = 1.$$
Wir führen den Hilfsvector ein
$$\tau = (\mu^2 - \varphi^{-1})^{-1}\mu,$$
woraus:
$$\mu = (\mu^2 - \varphi^{-1})\tau \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
Die Gleichung wird nun
$$S\mu\tau = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
oder nach (1)
$$\mu^2\tau^2 - S\tau\varphi^{-1}\tau = 1. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$
Man operire nun mit $S.\tau$ auf das Differential von (1) und ziehe hiervon ab die Hälfte des Differentials von (3); es folgt:
$$\tau^2 S\mu d\mu - S\tau d\mu = 0.$$

Wir haben aber auch (§ 311)

$$S\varrho d\mu = 0$$

und deshalb $$x\varrho = \mu\tau^2 - \tau,$$

wo x eine Scalar.

Diese Gleichung und (2) zeigen, dass

$$S\tau\varrho = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Operiren wir hierauf mit $S.\varrho$, so erhalten wir mit Hilfe von (1) des vorigen Paragraphen

$$x\varrho^2 = -\tau^2,$$

und $$\varrho^{-1} = -\mu + \tau^{-1}.$$

Dies liefert $$\varrho^{-2} = \mu^2 - \tau^{-2}.$$

Setzen wir dies in (1) oben ein, so folgt

$$\tau^{-1} - \varrho^{-1} = (\varrho^{-2} + \tau^{-2} - \varphi^{-1})\tau$$

oder $$\tau = (\varphi^{-1} - \varrho^{-2})^{-1}\varrho^{-1}.$$

Wir erhalten aus (4) die gesuchte Gleichung

$$S\varrho^{-1}(\varphi^{-1} - \varrho^{-2})^{-1}\varrho^{-1} = 0,$$

oder, durch eine schon angewandte Transformation,

$$S\varrho(\varphi - \varrho^2)^{-1}\varrho = -1.$$

415.) Es mag dem Leser für die *Praxis* der Quaternionenrechnung, die ja unser Hauptziel ist, von Nutzen sein, wenn wir einige dieser Untersuchungen durch ein anderes Verfahren wiederholen.

So wollen wir, wie in § 168, in § 407 schreiben

$$a^2 iSi\omega + b^2 jSj\omega + c^2 kSk\omega = \lambda' S\mu'\omega + \mu' S\lambda'\omega - p'\omega.$$

Durch dasselbe Verfahren wie in § 407 folgt:

$$S.\omega\alpha\lambda' S\mu'\omega + S.\omega\alpha\mu' S\lambda'\omega = 0.$$

Was die erzeugenden Geraden, mit denen wir es zu thun haben, betrifft, so können wir dies schreiben

$$\left.\begin{array}{l} S.\omega\alpha V.\lambda'\omega\mu' = 0 = S.\omega\alpha\lambda'\omega\mu', \\ \text{da } \omega\alpha \text{ ein Vector ist.} \\ \text{Wir können auch schreiben} \\ S.\mu' V.\omega\lambda'\omega\alpha = 0 = S.\mu'\omega\lambda'\omega\alpha. \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (1)$$

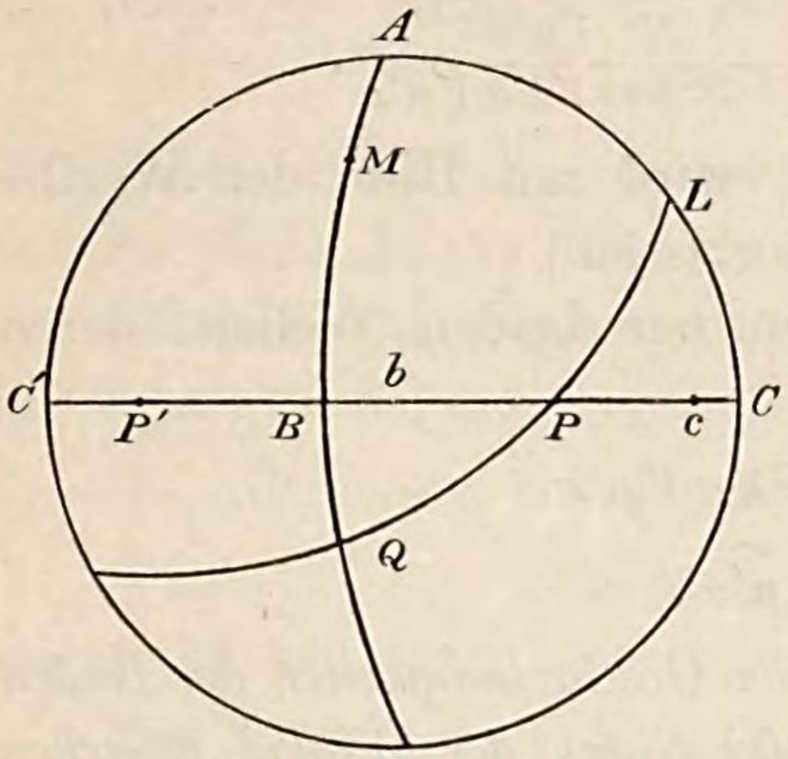
Die Gleichungen (1) stellen zwei Kegel zweiter Ordnung dar, die durch die Schnittlinie von (3) und (4) des § 407 gehen. Ihre Schnittlinien sind demnach die Schwingungsrichtungen.

416.) Aus (1) haben wir

$$S.\omega\lambda'\omega\alpha\mu' = 0.$$

$\omega\lambda'\omega$, α, μ sind also complanar; und da ω senkrecht auf α steht, so schliesst es denselben Winkel mit $V\lambda'\alpha$ und $V\mu'\alpha$ ein.

Denn sind L, M, A die Projectionen von λ', μ', α auf der Einheitskugel, BC der grösste Kreis, dessen Pol A ist, so haben wir als Projectionen der Werthe von ω auf der Kugel Punkte P und P' zu finden, so dass, wenn LP verlängert wird, bis



$$\widehat{PQ} = \widehat{LP},$$

Q auf dem grössten Kreise AM liegt. Hieraus

$$\widehat{CP} = \widehat{PB},$$

$$\widehat{C'P'} = \widehat{P'B},$$

welches den Satz beweist; denn die Projection von $V\lambda'\alpha$ und $V\mu'\alpha$ auf der Kugel sind die Punkte b und c auf BC, die um einen Quadranten von C respective von B entfernt sind.

417.) Oder auf folgende Weise:

$$S\omega\alpha = 0,$$

$$S.\omega V.\alpha\lambda'\omega\mu' = 0,$$

hieraus $$x\omega = V.\alpha V.\alpha\lambda'\omega\mu'$$

$$= -V.\lambda'\omega\mu' - \alpha S\alpha V.\lambda'\omega\mu'.$$

$$(S\lambda'\mu' - x)\omega = (\lambda' + \alpha S\alpha\lambda')S\mu'\omega + (\mu' + \alpha S\alpha\mu')S\lambda'\omega.$$

Operirt man mit $S.\lambda'$, so folgt

$$(x + S\lambda'\alpha S\mu'\alpha)S\lambda'\omega = [\lambda'^2\alpha^2 - S^2\lambda'\alpha]S\mu'\omega$$

$$= S\mu'\omega\, T^2\, V\lambda'\alpha.$$

Und der Symmetrie wegen ist

$$\frac{S\mu'\omega}{S\lambda'\omega} T^2 V\lambda'\alpha = \frac{S\lambda'\omega}{S\mu'\omega} T^2 V\mu'\alpha,$$

oder

$$\frac{S\lambda'\omega}{TV\lambda'\alpha} \pm \frac{S\mu'\omega}{TV\mu'\alpha} = 0,$$

$$S\omega\left(\frac{\lambda'}{TV\lambda'\alpha} \pm \frac{\mu'}{TV\mu'\alpha}\right) = 0,$$

und da

$$S\omega\alpha = 0,$$

$$\omega = U(UV\lambda'\alpha \pm UV\mu'\alpha).$$

418.) Die optische Deutung des gemeinsamen Resultates der beiden letzten Paragraphen ist, dass *die Polarisationsebenen der beiden Strahlen, deren Wellenfronten parallel sind, den Winkel halbiren, den die Ebenen einschliessen, die durch die Normale der Wellenfronte und die Vectoren* (optische Achsen) λ', μ' *gehen.*

419.) Wie in § 409 ist die Normalgeschwindigkeit gegeben durch

$$v^2 = S\omega\varphi\omega = 2S\lambda'\omega S\mu'\omega - p'\omega^2$$
$$= p' \mp \frac{S^2 . \lambda'\mu'\alpha}{(T \mp S) . V\lambda'\alpha\, V\mu'\alpha}.$$

[Diese Transformation, die ausgeführt wird mit Hilfe der Werthe von ω in § 417, bleibt dem Leser überlassen.]

Sind v_1, v_2 die Geschwindigkeiten der beiden Wellen, deren Normale α ist, so ist

$$v_1^2 - v_2^2 = 2T . V\lambda'\alpha\, V\mu'\alpha$$
$$\propto \sin\widehat{\lambda'\alpha} \sin\widehat{\mu'\alpha}.$$

Das heisst, *die Differenz der Quadrate der Geschwindigkeiten der beiden Wellen ist proportional dem Producte der Sinus der Winkel zwischen der Normalen der Wellenfronte und den optischen Achsen* ($\lambda'\mu'$).

420.) Wir haben

$$(T^2 - S^2) . V\lambda'\alpha\, V\mu'\alpha = T^2V . V\lambda'\alpha\, V\mu'\alpha = S^2 . \lambda'\mu'\alpha,$$

hieraus: $$v^2 = p' \mp (T + S) . V\lambda'\alpha\, V\mu'\alpha,$$

die Gleichung der Indexfläche, für welche

$$T\varrho = \frac{1}{v}, \qquad U\varrho = \alpha,$$

ist deshalb $$1 = -p'\varrho^2 \mp (T + S) . V\lambda'\varrho\, V\mu'\varrho.$$

Dies wird die Gleichung der Reciproken der Indexfläche, d. h. die Wellenfläche, wenn wir statt φ die Reciproke setzen, d. h. wenn wir in den Werthen von λ', μ', p' setzen $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ statt a, b, c. Wir haben dann als Transformation von § 409 (7), was noch einfacher hätte abgeleitet werden können,

$$1 = -p\varrho^2 \mp (T \pm S) . V\lambda\varrho\, V\mu\varrho$$

als eine andere Form der Fresnel'schen Wellengleichung.

Wenden wir die ι, $\varkappa$-Transformation des § 121 an, so können wir dies schreiben, wie der Leser leicht nachweisen kann,

$$(\varkappa^2 - \iota^2)^2 = S^2(\iota - \varkappa)\varrho + (TV\iota\varrho \pm TV\varkappa\varrho)^2.$$

421.) Da wir nur Beispiele der Quaternionenrechnung geben, nicht aber einen Gegenstand eingehend behandeln wollen, so gehen wir jetzt dazu über, einige Eigenschaften der Wellenfläche herzuleiten aus den verschiedenen Formen der Gleichung, die wir angegeben haben.

422.) *Fresnel's Construction der Welle durch Punkte.*

Aus § 273 (4) sehen wir, dass die Längen der Haupthalbachsen des Schnittes des Ellipsoids

$$S\varrho\varphi^{-1}\varrho = 1$$

und der Ebene $$S\alpha\varrho = 0,$$

die durch den Mittelpunkt geht, gegeben sind durch die Gleichung

$$S.\alpha(\varphi^{-1} - \varrho^{-2})^{-1}\alpha = 0.$$

Trägt man diese Längen auf α auf (α ist die im Mittelpunkte errichtete Normale der Schnittebene), so liegen deren Endpunkte auf einer Fläche, für welche $\alpha = U\varrho$ und $T\varrho$ die Werthe hat, welche durch jene Gleichung gegeben werden.

Die Gleichung des geometrischen Ortes ist also

$$S\varrho(\varphi^{-1} - \varrho^{-2})^{-1}\varrho = 0,$$

wie in §§ 409, 414.

Die Indexfläche folgt aus dem reciproken Ellipsoid

$$S\varrho\varphi\varrho = 1$$

durch dieselbe Construction.

423.) In der Gleichung

$$1 = -p\varrho^2 \mp (T \pm S).V\lambda\varrho\, V\mu\varrho$$

sei $$V\lambda\varrho = 0 \quad \text{oder} \quad V\mu\varrho = 0,$$

dann ist $$\varrho = \pm\frac{U\lambda}{\sqrt{p}} \quad \text{oder} \quad \varrho = \pm\frac{U\mu}{\sqrt{p}},$$

es gibt also vier singuläre Punkte.

Um die Eigenthümlichkeiten der Fläche in der Nähe dieser Punkte zu finden, setze man

$$\varrho = \frac{U\lambda}{\sqrt{p}} + \omega,$$

wo $T\omega$ sehr klein ist, so dass Glieder von höherer Ordnung als der ersten vernachlässigt werden können. Die Gleichung der Welle wird in der Nähe des singulären Punktes:

$$2pS\lambda\omega + S.\omega V.\lambda V\lambda\mu = \pm T.V\lambda\omega\, V\lambda\mu,$$

die Gleichung eines Kegels zweiter Ordnung.

424.) Aus der Aehnlichkeit der Gleichung der Indexfläche mit derjenigen der Welle folgt, dass auch die erstere vier conische Spitzen hat. Da eine unendliche Anzahl von Tangentialebenen in einem solchen Punkte an die Fläche gelegt werden kann, so muss die reciproke Fläche, von einer Ebene in einer unendlichen Zahl von Punkten berührt werden können. Die Wellenfläche hat also vier Tangentialebenen, die dieselben in Linien berühren. Um deren Form zu bestimmen, wollen wir die letzte Form der Gleichung der Welle in § 420 benutzen.

Setzen wir $$TV\iota\varrho = TV\varkappa\varrho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

so haben wir die Gleichung eines Kegels zweiten Grades. Er schneidet die Welle in der Schnittlinie derselben und der Ebene

$$S(\iota - \varkappa)\varrho = \pm (\varkappa^2 - \iota^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Nun *berühren* aber diese Ebenen die Wellenfläche, denn die Grösse auf der linken Seite dieser Gleichung kann ihrem absoluten Werthe nach nicht grösser sein als diejenige auf der rechten, so lange ϱ der Gleichung der Welle genügt.

Dass die Berührungslinien Kreise sind folgt aus (1) und (2), denn diese liefern

$$\varrho^2 = \mp S(\iota + \varkappa)\varrho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

die Gleichungen zweier Kugeln, auf welchen jene Curven liegen.

Der Durchmesser dieses Kreises ist

$$TV.(\iota + \varkappa)U(\iota - \varkappa) = \frac{2\,TV\iota\varkappa}{T(\iota - \varkappa)} = \frac{1}{b}\sqrt{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}.$$

[So einfach dies Verfahren auch sein mag, so findet man doch, dass Gleichung

$$S\varrho(\varphi^{-1} - \varrho^{-2})^{-1}\varrho = 0$$

diese Resultate eben so leicht liefert. Wir haben nur die Fälle zu untersuchen, in denen $-\varrho^{-2}$ die Werthe einer der Wurzeln der symbolischen cubischen Gleichung φ^{-1} hat. In dem gegenwärtigen Falle ist $T\varrho = b$ der einzige Fall, den wir zu betrachten haben.]

425.) Aus § 413 sehen wir, dass der Hilfsvector des folgenden Paragraphen, nämlich

$$\tau = (\mu^2 - \varphi^{-1})^{-1}\mu = (\varphi^{-1} - \varrho^{-2})^{-1}\varrho^{-1}$$

der Restitutionskraft $\varphi\omega$ parallel ist. Wie Hamilton gezeigt hat, bedeutet die Wellengleichung in der Form

$$S\tau\varrho = 0$$

(4) des § 414, *dass die Richtung der Restitutionskraft senkrecht auf dem Strahl steht.*

Da es für jeden Versor eines Vectors der Welle zwei Werthe des Tensors gibt, welche aus der Gleichung

$$S.U\varrho(\varphi^{-1} - \varrho^{-2})^{-1}U\varrho = 0$$

gefunden werden, so sehen wir aus § 422, dass *die Schwingungsrichtungen, für eine gegebene ebene Fronte, den Achsen eines jeden Schnittes des Ellipsoids*

$$S.\varrho\varphi^{-1}\varrho = 1$$

und einer Ebene parallel der Fronte parallel sind; oder den Tangenten der Krümmungslinien in einem Punkte, wo die Tangentialebene der Wellenfronte parallel ist.

426.) *Für eine Curve, welche auf der Wellenfläche liegt und in jedem Punkte die entsprechende Schwingungslinie berührt,* ist

$$\varphi d\varrho \parallel (\varphi^{-1} - \varrho^{-2})^{-1}\varrho .$$

Hieraus $S\varphi\varrho d\varrho = 0$ oder $S\varrho\varphi\varrho = C$;

derartige Curven sind also die Schnitte der Welle mit einer Reihe von concentrischen Ellipsoiden.

427.) *Für Curven, welche die Schwingungslinien rechtwinklig durchschneiden*, haben wir

$$d\varrho \parallel V\varrho\varphi^{-1}(\varphi^{-1} - \varrho^{-2})^{-1}\varrho$$
$$\parallel V\varrho(\varphi - \varrho^{2})^{-1}\varrho.$$

Hieraus $S\varrho d\varrho = 0$ oder $T\varrho = C$.

Diese Curven liegen also auf concentrischen Kugeln.

Dieselben sind auch *sphärische Kegelschnitte*, denn wenn

$$T\varrho = C,$$

so wird die Gleichung der Welle

$$S.\varrho(\varphi^{-1} + C^{-2})^{-1}\varrho = 0,$$

die Gleichung eines Kreiskegels, dessen Spitze in dem gemeinsamen Mittelpunkte der Kugel und der Wellenfläche liegt und sie in ihrer Schnittlinie schneidet. (Quarterly Math. Journal, 1859. In diesem Aufsatze werden noch einige andere Eigenschaften der Wellenfläche betrachtet.)

428.) Als weiteres Beispiel behandeln wir die Wirkung eines electrischen Stromes auf einen andern oder auf einen Magnet und die Wirkung permanenter Magnete auf einander.

Vergleicht man unsere Methoden mit denjenigen von Ampère (Théorie des Phénomènes électrodynamiques etc., die von Murphy in seiner Electricity sehr klar dargestellt sind), so wird man sofort sehen, wieviel man an Einfachheit gewinnt durch Einführen der Quaternionen.

Derselbe Gewinn an Einfachheit wird sich zeigen bei den Untersuchungen der Wirkungen von permanenten Magneten auf einander, wo die resultirenden Kräfte und Kräftepaare unmittelbar in ihrer einfachsten Form eingeführt werden.

429.) Die empirischen Gesetze Ampère's kann man zusammenfassen wie folgt:

I. Gleiche und entgegengesetzte Ströme in demselben Leiter haben gleiche und entgegengesetzte Wirkungen auf andere Leiter.

II. Die Wirkung eines beliebig gebogenen oder gewundenen Leiters ist dieselbe wie die eines geraden Leiters, der von dem gleichen Strome durchflossen wird und die beiden Leiter nahezu zusammenfallen.

III. Kein geschlossener Strom kann ein Element eines kreisförmigen Leiters in Drehung um eine Achse versetzen, die durch den Mittelpunkt des Kreises geht und auf dessen Ebene senkrecht steht.

IV. In ähnlichen Systemen, die von gleichen Strömen durchflossen werden, sind die Kräfte gleich.

Hierzu fügen wir die Annahme, dass die Wirkung zwischen zwei Stromelementen in der Geraden liege, die sie verbindet, und dass diese Wirkung proportional sei dem Product aus der Stromstärke und der Länge des Elementes.

430.) Es seien zwei geschlossene Ströme, deren Intensität a und a_1 sind; α' und α_1 seien Elemente dieser Ströme, α der Vector, der die Mittelpunkte verbindet. Die Componente der Wirkung von α' auf α_1 in Richtung von α_1 muss ein vollständiges Differential in Bezug auf α sein (d. h. in Bezug auf die drei unabhängigen Variabeln, die in α vorkommen), denn die Componente der Gesammtwirkung des geschlossenen Stromes, dessen Element α' ist, ist Null nach III.

Nach I und II ist jene Wirkung eine Function von $T\alpha$, $S\alpha\alpha'$, $S\alpha\alpha_1$ und $S\alpha'\alpha_1$, denn diese genügen, um α' und α_1 zu zerlegen in drei aufeinander senkrecht stehende Componenten, die α parallel sind oder senkrecht stehen auf α.

Die Wirkung der beiden Elemente auf einander ist also:

$$aa_1 U\alpha f(T\alpha,\ S\alpha\alpha';\ S\alpha\alpha_1,\ S\alpha'\alpha_1),$$

und die Componente in Richtung von α_1 ist

$$aa_1 SU\alpha_1 U\alpha f.$$

Damit Action und Reaction der absoluten Grösse nach einander gleich seien, so muss f in $S\alpha\alpha'$ und $S\alpha\alpha_1$ symmetrisch sein. Weiter *kann* α' (das Differential von α) *nur in der ersten Potenz vorkommen* und *muss* in jedem Gliede von f vorkommen.

Hieraus: $$f = AS\alpha'\alpha_1 + BS\alpha\alpha' S\alpha\alpha_1.$$

Nach IV muss dies von den Dimensionen des System unabhängig sein. A ist demnach von der -2^{ten} Dimension und B von der 4^{ten} Dimension in Bezug auf $T\alpha$.

Demnach ist

$$\frac{1}{T\alpha}\{AS\alpha\alpha_1 S\alpha'\alpha_1 + BS\alpha\alpha' S^2\alpha\alpha_1\},$$

ein vollständiges Differential in Bezug auf α, wenn $d\alpha = \alpha'$.

Es sei nun $$A = \frac{C}{T\alpha^2},$$

wo C eine Constante ist, die von den angewandten Einheiten abhängt. Es folgt:

$$d\frac{C}{2T\alpha^3} = \frac{B}{T\alpha} S\alpha\alpha'$$

oder
$$B = \tfrac{3}{2}\frac{C}{T\alpha^4},$$

und die Componente der Kraft:

$$= \frac{Caa_1}{2T\alpha_1} d\frac{S^2\alpha\alpha_1}{T\alpha^3} = Caa_1 \frac{S\alpha\alpha_1}{T\alpha_1 T\alpha^5}(-\alpha^2 S\alpha'\alpha_1 + \tfrac{3}{2}2S\alpha\alpha' S\alpha\alpha_1)$$

$$= Caa_1 \frac{S\alpha\alpha_1}{T\alpha_1 T\alpha^5}(S.V\alpha\alpha' V\alpha\alpha_1 + \tfrac{1}{2}S\alpha\alpha' S\alpha\alpha_1);$$

der Factor in Klammern ist in gewöhnlicher Schreibweise proportional mit

$$(\sin\vartheta \sin\vartheta' \cos\omega - \tfrac{1}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta').$$

431.) Die gesammte Kraft ist also

$$\frac{Caa_1\alpha}{2S\alpha\alpha_1} d\frac{S^2\alpha\alpha_1}{T\alpha^3} = \frac{Caa_1\alpha}{2S\alpha\alpha'} d_1\frac{S^2\alpha\alpha'}{T\alpha^3},$$

wenn $d_1\alpha = \alpha_1$. [Man kann dies umformen in

$$-\frac{2Caa_1 U\alpha}{(T\alpha)^{\frac{1}{2}}} dd_1(T\alpha)^{\frac{1}{2}};$$

dies ist die Quaternionenform des bekannten Ampère'schen Ausdrucks.]

432.) Die ganze Wirkung des geschlossenen Stromes, dessen Element α' ist auf α_1, ist also

$$\frac{Caa_1}{2}\int \frac{\alpha}{S\alpha\alpha_1} d\frac{(S\alpha\alpha_1)^2}{T\alpha^3}$$

$$= \frac{Caa_1}{2}\left\{\frac{\alpha S\alpha\alpha_1}{T\alpha^3} - V.\alpha_1\int\frac{V\alpha\alpha'}{T\alpha^3}\right\}$$

zwischen den gehörigen Grenzen genommen. Da der integrirte Theil derselbe an beiden Grenzen ist, so ist die Gesammtkraft

$$-\frac{Caa_1}{2} V\alpha_1\beta, \quad \text{wo} \quad \beta = \int\frac{V\alpha\alpha'}{T\alpha^3} = \int\frac{dU\alpha}{\alpha}$$

und hängt ab von der Gestalt des geschlossenen Stromes.

433.) Dieser Vector β, der von grosser Wichtigkeit ist in der ganzen Theorie der Wirkungen geschlossener oder unendlich langer Ströme, entspricht der Geraden, welche Ampère nennt: „*directrice de l'action électrodynamique*“. Dieser Vector hat in jedem Punkte des Raumes einen bestimmten Werth, unabhängig von der Existenz eines andern Stromes.

Man betrachte den geschlossenen Strom als Polygon, dessen Seiten unendlich klein sind; die Eckpunkte verbinde man mit einem beliebigen Punkte; in diesem Punkte errichte man senkrecht auf der Ebene eines jeden der so gebildeten elementaren Dreiecke einen Vector, dessen Länge $\frac{\omega}{r}$ ist; ω ist der Winkel des Dreiecks in jenem Punkte,

und r die Länge einer der diesen Winkel einschliessenden Seiten. Die Summe dieser Vectoren ist die Directrix in jenem Punkte.

434.) Man sieht aus der *Form* des Resultates des § 432, dass, *wird* α_1 *um seinen Mittelpunkt gedreht, die Richtung der resultirenden Kraft stets in der Ebene liegt, deren Normale* β *ist.*

Bleibt das Element α_1 stets senkrecht auf einem gegebenen Vector δ, so haben wir

$$S\alpha_1\delta = 0,$$

und die Componente der Kraft in der Bewegungsebene ist proportional mit

$$TV.\delta V\alpha_1\beta.$$

Nun ist $$V.\delta V\alpha_1\beta = -\alpha_1 S\beta\delta.$$

Diese Kraft ist also constant für alle möglichen Lagen von α_1; oder:

Die Wirkung eines beliebigen Systems von geschlossenen Strömen auf das Element eines Leiters, das sich nur in einer Ebene bewegen kann, ist (in jener Ebene) von der Richtung des Elementes unabhängig.

435.) Der geschlossene Strom sei *eben* und *sehr klein*; ε (wo $T\varepsilon = 1$) sei die Normale desselben und γ sei der Vector eines beliebigen Punktes innerhalb desselben (z. B. des Schwerpunktes der eingeschlossenen Fläche). Der Anfangspunkt der Vectoren liege im Mittelpunkte von α_1.

Es sei $\alpha = \gamma + \varrho$; also $\alpha' = \varrho'$,

und
$$\beta = \int \frac{V\alpha\alpha'}{T\alpha^3} = \int \frac{V(\gamma+\varrho)\varrho'}{T(\gamma+\varrho)^3}$$
$$= \frac{1}{T\gamma^3}\int V(\gamma+\varrho)\varrho'\left\{1+\frac{3S\gamma\varrho}{T\gamma^2}\right\}$$

mit genügender Annäherung. Zwischen Grenzen integrirt ist

$$\int V\varrho\varrho' = 2A\varepsilon,$$

wo A der Flächeninhalt des geschlossenen Stromes ist.

Allgemein

$$\int V\gamma\varrho' S\gamma\varrho = \tfrac{1}{2}(S\gamma\varrho V\gamma\varrho + \gamma V.\gamma\int V\varrho\varrho')$$
$$= (\text{zwischen Grenzen})\ A\gamma V\gamma\varepsilon.$$

In diesem Falle ist also

$$\beta = \frac{A}{T\gamma^3}\left(2\varepsilon + \frac{3\gamma V\gamma\varepsilon}{T\gamma^2}\right)$$
$$= -\frac{A}{T\gamma^3}\left(\varepsilon + \frac{3\gamma S\gamma\varepsilon}{T\gamma^2}\right).$$

436.) Hat man an Stelle eines einzigen kleinen ebenen Stromes eine Reihe derselben von gleichem Flächeninhalt, die in Röhrenform regelmässig aneinander gereiht sind, so sei x die Entfernung zweier aufeinander folgenden Elemente, gemessen in Richtung der Achse

der Röhre. Setzen wir $\gamma' = x\varepsilon$, so erhalten wir für die gesammte Wirkung einer solchen Reihe von Strömen auf α_1

$$\frac{CAaa_1}{2x} V.\alpha_1 \int \left(\frac{\gamma'}{T\gamma^3} + \frac{3\gamma S\gamma\gamma'}{T\gamma^5} \right)$$
$$= \frac{CAaa_1}{2x} \frac{V\alpha_1\gamma}{T\gamma^3} \text{ (zwischen gehörigen Grenzen).}$$

Ist die Achse der Röhre eine geschlossene Curve, so verschwindet dies.

Ein geschlossenes Solenoid übt also keine Kraft aus auf das Element eines Leiters. Dasselbe gilt auch von einem in beiden Richtungen unbegrenzten Solenoid.

Erstreckt sich die Achse in einer Richtung ins Unendliche, und ist γ_0 der Vector des andern Endpunktes, so ist die Wirkung

$$\frac{CAaa_1}{2x} \frac{V\alpha_1\gamma_0}{T\gamma_0^3}$$

und *steht also senkrecht auf dem Stromelement und auf der Geraden, die dasselbe mit dem Endpunkte des Solenoids verbindet. Diese Kraft ist umgekehrt proportional* $T\gamma_0^2$ *und direkt proportional dem Sinus des Winkels zwischen dem Elemente und der Geraden, welche das Element mit dem Endpunkte des Solenoids verbindet. Sie ist weiter* x *umgekehrt proportional, also direkt proportional der Anzahl von Strömen in der Längeneinheit der Achse des Solenoids.*

437.) Um die Wirkung zu finden, welche der ganze Strom auf den Endpunkt des Solenoids ausübt, müssen wir das Vorzeichen jenes Ausdruckes ändern und setzen $\alpha_1 = \gamma_0'$. Wir erhalten

$$-\frac{CAaa_1}{2x} \int \frac{V\gamma_0'\gamma_0}{T\gamma_0^3},$$

ein Integral derselben Art wie in § 432, dessen Werth in speciellen Fällen leicht angegeben werden kann.

438.) *Der Leiter sei eine Gerade, die in beiden Richtungen unbegrenzt ist.*

Es sei $h\vartheta$ die Senkrechte, die von dem Endpunkte des Solenoids auf den Leiter gefällt wird. Der Leiter sei $\| \eta$ und $T\vartheta = T\eta = 1$.

Hieraus $\gamma_0 = h\vartheta + y\eta$ (y ist eine Scalar),

$$V\gamma_0'\gamma_0 = hy' V\eta\vartheta,$$

und das Integral in § 436 ist

$$hV\eta\vartheta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y'}{(h^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{h} V\eta\vartheta;$$

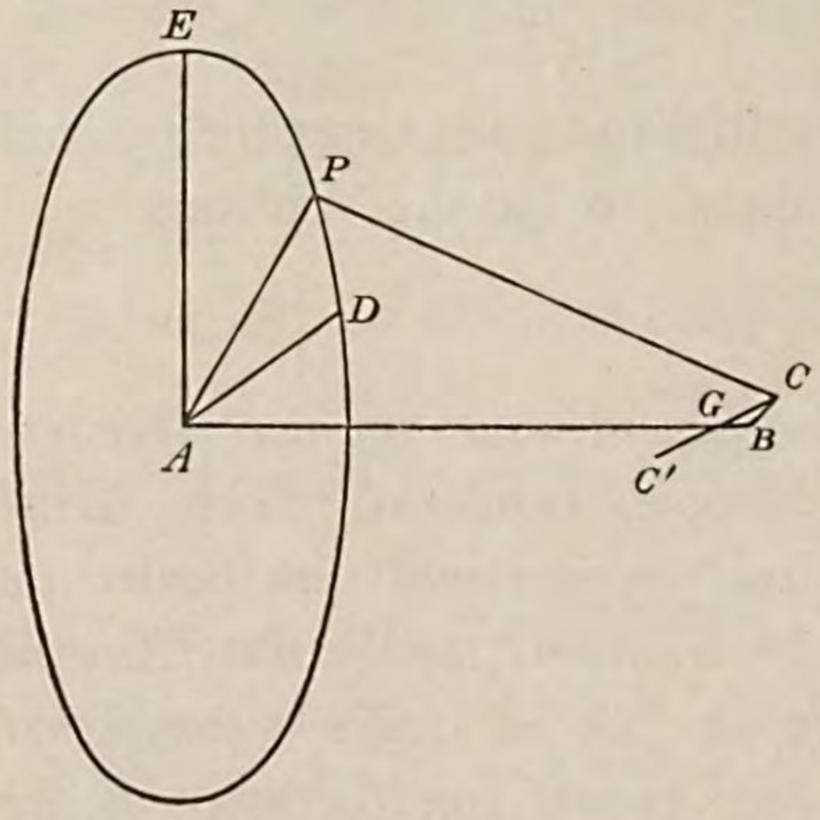
die Gesammtwirkung ist also

$$-\frac{CAaa_1}{xh} V\eta\vartheta.$$

Diese Kraft steht senkrecht auf der Ebene, die durch den Leiter und durch den Endpunkt des Solenoids geht, und ist umgekehrt proportional der Entfernung dieses Punktes vom Leiter.

Es entspricht dies der Wirkung, die, der Beobachtung zu Folge, ein unbegrenzter geradliniger Strom auf einen Magnetpol oder auf ein Theilchen freien Magnetismus ausübt.

439.) *Der Leiter sei kreisförmig und der Pol liege nahezu in dessen Achse.*



Es sei EPD der Leiter, AB dessen Achse, und C der Pol; BC sei senkrecht auf AB und klein im Vergleich mit $AE = h$, dem Radius des Kreises.

Es sei

$$AB = a_1 i, \qquad BC = bk,$$
$$AP = h(jx + ky),$$

wo

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix}\right\} \angle EAP = \left\{\begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix}\right\} \vartheta .$$

Dann ist $$CP = \gamma = a_1 i + bk - h(jx + ky),$$

und die Wirkung auf $C \propto \int \frac{V\gamma\gamma'}{T\gamma^3}$

$$\propto h \int \frac{\vartheta' \{(h - by)i + a_1 xj + a_1 yk\}}{(a_1{}^2 + b^2 + h^2 - 2bhy)^{\frac{3}{2}}},$$

wo das Integral sich auf den ganzen Strom bezieht.

440.) Betrachten wir den speciellen Fall, wo C der Pol eines kleinen Magnetes oder Solenoids CC' ist, dessen Länge $2l$ ist und dessen Mittelpunkt in G liegt, um a von dem Mittelpunkte des Leiters entfernt.

Es sei $$\angle CGB = \triangle .$$

Dann ist $$a_1 = a + l \cos \triangle$$
$$b = l \sin \triangle ,$$

die Wirkung auf C wird, wenn $a_1{}^2 + b^2 + h^2 = A^2$,

$$\frac{h}{A^3} \int \vartheta' \{(h - by)i + a_1 xj + a_1 yk\} \left\{1 + \frac{3hby}{A^2} + \frac{15}{2}\frac{h^2 b^2 y^2}{A^4} + \dots\right\}$$
$$= \frac{\pi h^2}{A^3}\left(2i - \frac{3b^2 i}{A^2} + \frac{3a_1 bk}{A^2} + \frac{15}{2}\frac{h^2 b^2 i}{A^4} + \dots\right),$$

denn für den geschlossenen Strom ist

$$\int \vartheta' y^{2n} = 2\pi \frac{|2n)}{2^{2n}(\underline{|n})^2}$$
$$\int \vartheta' y^{2n+1} = 0$$
$$\int \vartheta' x y^m = 0.$$

Nehmen wir an, der Mittelpunkt des Magnetes liege fest, so ist die Vectorachse des Kräftepaares, welche entsteht durch die Wirkung des Stromes auf C,

$$lV.(i\cos\triangle + k\sin\triangle)\int \frac{V\gamma\gamma'}{T\gamma^3}$$
$$\propto \frac{\pi h^2 l \sin\triangle}{A^3} j\left\{2 - \frac{3b^2}{A^2} + \frac{15}{2}\frac{h^2 b^2}{A^4} - \frac{3a_1 b\cos\triangle}{A^2\sin\triangle}\right\}.$$

Wird nun A u. s. w. entwickelt nach Potenzen von l, so erhält man

$$\frac{\pi h^2 l\sin\triangle}{(a^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} j\left\{2 - \frac{6al\cos\triangle}{a^2+h^2} + \frac{15a^2l^2\cos^2\triangle}{(a^2+h^2)^2} - \frac{3l^2}{a^2+h^2} - \frac{3l^2\sin^2\triangle}{a^2+h^2}\right.$$
$$\left. + \frac{15}{2}\frac{h^2l^2\sin^2\triangle}{(a^2+h^2)^2} - \frac{3(a+l\cos\triangle)l\cos\triangle}{a^2+h^2}\left(1 - \frac{5al\cos\triangle}{a^2+h^2}\right)\right\}.$$

Setzt man $-l$ statt l und ändert man das Vorzeichen des Ganzen, um das Kräftepaar zu erhalten, das auf C wirkt, so erhält man die Vectorachse des vollständigen Kräftepaares

$$\frac{4\pi h^2 l\sin\triangle}{(a^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} j\left\{1 + \frac{3}{4}\frac{l^2(4a^2-h^2)(4-5\sin^2\triangle)}{(a^2+h^2)^2} + \ldots\right\},$$

dies ist fast genau proportional mit $\sin\triangle$, wenn $2a = h$ und l klein ist.

Hierauf beruht eine Modification des Tangential-Galvanometers. (Bravais, Ann. de Chimie XXXVIII, 309.)

441.) Wie oben haben wir für die Wirkung eines unbegrenzten Solenoids auf α_1

$$\frac{CAaa_1}{2x}\frac{V\alpha_1\gamma}{T\gamma^3}.$$

Es sei nun α_1 das Element eines kleinen ebenen Stromes, δ der Vector des Schwerpunktes seines Flächeninhalts; der Anfangspunkt liege im Pole des Solenoids.

Es sei $\gamma = \delta + \varrho$, dann ist $\alpha_1 = \varrho'$.

Die Gesammtwirkung ist also

$$-\frac{CAaa_1}{2x}\int \frac{V(\delta+\varrho)\varrho'}{T(\delta+\varrho)^3}$$
$$= \frac{CAA_1aa_1}{2xT\delta^3}\left(\varepsilon_1 + \frac{3\delta S\delta\varepsilon_1}{T\delta^2}\right),$$

wo A_1 und ε_1 für den neuen Strom dieselbe Bedeutung haben wie A und e für den alten.

Es gehöre auch der neue Strom zu einem unbegrenzten Solenoid,

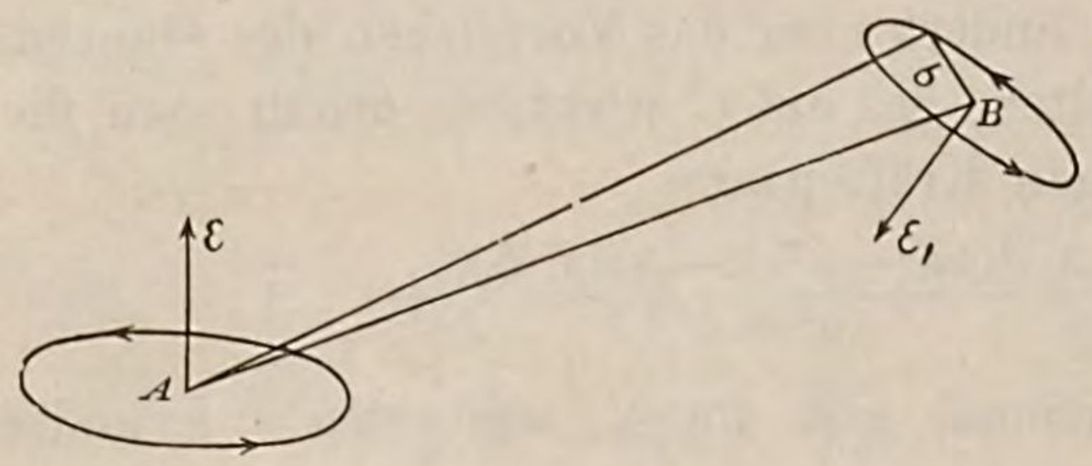
und δ bezeichne den Vector, der die Pole der beiden Solenoide verbindet. Die Kraft, die diese aufeinander ausüben, ist dann

$$\frac{CAA_1aa_1}{2xx_1}\int^{\bullet}\left(\frac{\delta'}{T\delta^3}+\frac{3\delta S\delta\delta'}{T\delta^5}\right)$$

$$=\frac{CAA_1aa_1}{2xx_1}\frac{\delta_0}{(T\delta_0)^3}\propto\frac{U\delta_0}{(T\delta_0)^2}.$$

Es ist dies auch die Kraft, die zwei magnetische Pole aufeinander ausüben. Zwei begrenzte Solenoide wirken also aufeinander genau so, wie zwei Magnete. Und der Pol eines unbegrenzten Magnetes wirkt wie ein freies magnetisches Theilchen.

442.) Die Wechselwirkung zwischen zwei unendlich kleinen geschlossenen Strömen, deren Normalen ε und ε_1 sind, kann man herleiten aus dem Ausdruck $\frac{U\delta}{T\delta^2}$ für die Wirkung der Pole zweier unbegrenzten Solenoide, indem man zweimal differentiirt und das eine mal setzt $d\delta \parallel \varepsilon$ und das andere mal $\parallel \varepsilon_1$.



Wir können diese Kräfte aber auch direkt berechnen durch ein Verfahren, durch welches wir auch das Kräftepaar erhalten, welches auf den einen Strom wirkt. Der Einfachheit wegen nehmen wir an, der erste Strom sei kreisförmig. A und B seien die Schwerpunkte der Flächen A und B, ε und ε_1 Vectornormalen dieser Ebenen, σ ein beliebiger Radiusvector von B, und $AB=\beta$.

Die Gesammtwirkung auf σ' ist nach §§ 432, 435

$$\propto\frac{A}{T(\beta+\sigma)^3}V\sigma'\left\{\varepsilon+\frac{3(\beta+\sigma)S(\beta+\sigma)\varepsilon}{T(\beta+\sigma)^2}\right\},$$

$$\propto\frac{1}{T\beta^3}\left\{V\sigma'\varepsilon\left(1+\frac{3S\beta\sigma}{T\beta^2}\right)+\frac{3V\sigma'\beta S\beta\varepsilon}{T\beta^3}\left(1+\frac{5S\beta\sigma}{T\beta^2}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{3V\sigma'\beta S\sigma\varepsilon}{T\beta^2}+\frac{3V\sigma'\sigma S\beta\varepsilon}{T\beta^2}\right\}.$$

Zwischen gehörigen Grenzen ist nun

$$\int V\sigma'\eta S\vartheta\sigma=-A_1V.\eta V\vartheta\varepsilon_1,$$

denn allgemein

$$\int V\sigma'\eta S\vartheta\sigma=-\tfrac{1}{2}(V\eta\sigma S\vartheta\sigma+V.\eta V.\vartheta\int V\sigma\sigma').$$

Nach einigen Reductionen finden wir hieraus, dass die ganze Kraft, die A auf den Schwerpunkt der Fläche B ausübt, ist

$$\propto\frac{AA_1}{T\beta^5}\left\{\beta\left(S\varepsilon\varepsilon_1+\frac{5S\beta\varepsilon S\beta\varepsilon_1}{T\beta^2}\right)+\varepsilon S\beta\varepsilon_1+\varepsilon_1S\beta\varepsilon\right\}.$$

Dies kann man, wie schon bemerkt, unmittelbar erhalten durch zweimalige Differentiation von $\frac{U\beta}{T\beta^2}$. Auf dieselbe Art findet man das Vectormoment, das von der Wirkung von A auf B herrührt, um den Schwerpunkt von B:

$$\propto \frac{A}{T\beta^3}\int V.\sigma\left(V\sigma'\varepsilon + \frac{3\,V\sigma'\beta\,S\beta\varepsilon}{T\beta^3}\right),$$

$$\propto -\frac{A\,A_1}{T\beta^3}\left(V\varepsilon\varepsilon_1 + \frac{3\,V\beta\varepsilon_1\,S\beta\varepsilon}{T\beta^2}\right).$$

Diese Ausdrücke für die Gesammtkraft eines kleinen Magnetes auf den Schwerpunkt eines andern, und für das Kräftepaar um jenen Schwerpunkt, scheinen die einfachsten zu sein, die man geben kann. Man kann leicht hieraus die gewöhnlichen Formen herleiten, So kann man zeigen, dass das gesammte resultirende Kräftepaar auf den zweiten Magnet

$$\propto \frac{T\left(V\varepsilon\varepsilon_1 + \frac{3V\beta\varepsilon_1\,S\beta\varepsilon}{T\beta^2}\right)}{T\beta^3}$$

zusammenfällt mit demjenigen, das Ellis (Camb. Math. Journal IV, 95) gegeben hat; doch ist dieser Ausdruck weniger einfach und lässt sich nicht so leicht deuten.

443.) Die obigen Formeln zeigen nun, dass die Gesammtkraft, die ein kleiner Magnet M auf den Schwerpunkt m eines andern ausübt, sich aus vier Gliedern zusammensetzt. Diese Theilkräfte sind folgende:

Eine Kraft 1^{stens} *in der Geraden, welche die beiden Magnete verbindet, und dem Cosinus ihrer Neigung proportional ist;*

2^{tens} *in derselben Geraden, proportional dem fünffachen Producte der Cosinus der Neigungen der Magnete zu dieser Geraden;*

3^{tens} und 4^{tens} *parallel zu* $\left\{\begin{matrix} m \\ M \end{matrix}\right\}$ *und proportional dem Cosinus der Neigung von* $\left\{\begin{matrix} M \\ m \end{matrix}\right\}$ *zur Verbindungslinie.*

Alle diese Kräfte verhalten sich weiter umgekehrt wie die vierte Potenz der Entfernung zwischen den Magneten.

Für die Kräftepaare um den Schwerpunkt von m haben wir

1^{stens} *ein Kräftepaar, dessen Achse auf beiden Magneten senkrecht steht und dem Sinus ihrer Neigung proportional ist.*

2^{tens} *ein Kräftepaar, dessen Achse auf m und der Verbindungslinie der Magnete senkrecht steht, dessen Moment proportional ist dem dreifachen Producte des Sinus der Neigung von m, und dem Cosinus der Neigung von M zu der Verbindungslinie.*

Diese Kräftepaare sind umgekehrt proportional der dritten Potenz der Entfernung der beiden Magnete.

[Diese Resultate sind ein gutes Beispiel von dem, was man die *innere* Natur der Quaternionen genannt hat; man sieht, dass die Kräfte und Kräftepaare zurückgeführt werden auf solche, die von Coordinatenachsen unabhängig sind und sich nur auf Linien beziehen, die durch die Natur der Aufgabe gegeben sind. Um zu zeigen, wie leicht sich jene Ergebnisse anwenden lassen, betrachten wir ein Theorem von Gauss.]

444.) *Stehen zwei kleine Magnete aufeinander senkrecht, so ist das Drehungsmoment des ersten annähernd zweimal so gross, wenn die Achse des zweiten durch den Mittelpunkt des ersten geht, als wenn die Achse des ersten durch den Mittelpunkt des zweiten geht.*

In dem ersten Falle ist $\varepsilon \parallel \beta \perp \varepsilon_1$;

das Drehungsmoment also

$$= \frac{C'}{T\beta^3} T(\varepsilon\varepsilon_1 - 3\varepsilon\varepsilon_1) = \frac{2C'}{T\beta^3} T\varepsilon\varepsilon_1.$$

In dem zweiten Falle $\varepsilon_1 \parallel \beta \perp \varepsilon$,

und das Moment $= \frac{C'}{T\beta^3} T\varepsilon\varepsilon_1$;

dies ist der obige Satz.

445.) Wir können die Resultate des § 442 auch ableiten, indem wir an Stelle der beiden kleinen Ströme zwei kleine Magnete setzen, die auf den Ebenen der Ströme senkrecht stehen. β ist dann der Vector, der die Mittelpunkte dieser Magnete verbindet, und indem wir die Tensoren ändern, können wir 2ε und $2\varepsilon_1$ als die Längen der Magnete betrachten.

Die gegenseitige Einwirkung ist dann:

$$\propto \frac{U}{T^2}(\beta+\varepsilon-\varepsilon_1) - \frac{U}{T^2}(\beta-\varepsilon-\varepsilon_1) + \frac{U}{T^2}(\beta-\varepsilon+\varepsilon_1) - \frac{U}{T^2}(\beta+\varepsilon+\varepsilon_1)$$

und dies kann zurückgeführt werden auf

$$-\frac{12}{T\beta^5}\left\{\beta\left(S\varepsilon\varepsilon_1 + \frac{5S\beta\varepsilon S\beta\varepsilon_1}{T\beta^2}\right) + \varepsilon_1 S\beta\varepsilon + \varepsilon S\beta\varepsilon_1\right\},$$

wenn man kleine Glieder vernachlässigt. Es ist derselbe Ausdruck wie oben.

Operiren wir mit $V.\varepsilon_1$ auf die beiden ersten Glieder des ursprünglichen Ausdrucks und ziehen davon ab den Ausdruck, den man erhält, indem man in diesem Resultate das Zeichen von ε_1 ändert, so erhalten wir die Vectorachse des Kräftepaares, das auf den Magnet $2\varepsilon_1$ wirkt; auch dies ist wie oben proportional

$$\frac{4}{T\beta^3}\left(V\varepsilon_1\varepsilon + \frac{3V\varepsilon_1\beta S\beta\varepsilon}{T\beta^2}\right).$$

446.) Wir wollen jetzt ganz allgemein die verschiedenen Ausdrücke betrachten für die Kraft, die ein Element eines linearen Leiters auf das Element eines andern ausübt. (Dieser Paragraph ist genommen aus Proc. R. S. E. 1874.)

Die Ampère'schen Gesetze für geschlossene Ströme sind angeführt in § 429.

a) Zuerst wollen wir den Ausdruck untersuchen für die *Kraft*, die ein Element auf ein anderes ausübt.

Es sei α der Vector, der die Elemente α_1 und α' zweier Leiter verbindet; nach I, II ist die Wirkung von α_1 auf α' *linear* in Bezug auf α_1 und α' und kann ausgedrückt werden durch

$$\varphi\alpha',$$

wo φ eine lineare Vectorfunction ist, in deren beide Theile α_1 linear eingeht.

Die Componente hiervon in Richtung von α' ist

$$S.U\alpha'\varphi\alpha',$$

und nach III. muss dies ein vollständiges Differential sein in Bezug auf den Stromkreis, von dem α_1 ein Element ist.

Hieraus $$\varphi\alpha' = -(S\alpha_1\nabla)\psi\alpha' + V\alpha'\chi\alpha_1,$$

wo ψ und χ lineare Vectorfunctionen sind, die bloss α enthalten.

Dass dem so ist, folgt daraus, dass $\varphi\alpha'$ linear und homogen ist, sowohl in Bezug auf α_1, wie auch auf α'. Es folgt weiter aus IV., dass derjenige Theil von $\varphi\alpha'$, der nicht verschwindet nach der Integration über die beiden Stromkreise, von der Dimension Null ist in Bezug auf $T\alpha$, $T\alpha'$, $T\alpha_1$. Hieraus folgt, dass χ von der Dimension -2 in $T\alpha$ ist und

$$\chi\alpha_1 = \frac{p\alpha S\alpha\alpha_1}{T\alpha^4} + \frac{q\alpha_1}{T\alpha^2} + \frac{tV\alpha\alpha_1}{T\alpha^3},$$

wo p, q, t Zahlen sind.

Wir haben also

$$\varphi\alpha' = -S(\alpha_1\nabla)\psi\alpha' + \frac{pV\alpha\alpha' S\alpha\alpha_1}{T\alpha^4} + \frac{qV\alpha'\alpha_1}{T\alpha^2} + \frac{tV.\alpha' V\alpha\alpha_1}{T\alpha^3}.$$

Aendert man hierin das Vorzeichen von α und vertauscht man α' und α_1, so erhält man die Wirkung von α' auf α_1. Vertauscht man in dem neuen Ausdruck wiederum α' und α_1 und ändert dann das Vorzeichen des Ganzen, so muss man den ursprünglichen Ausdruck wieder erhalten; denn die Wirkung hängt ab von der relativen und nicht von der absoluten Lage von α, α_1, α'. Dies liefert

$$p = 0, \qquad q = 0,$$

und $$\varphi\alpha' = -S(\alpha_1\nabla)\psi\alpha' + \frac{tV.\alpha' V\alpha\alpha_1}{T\alpha^3},$$

mit der Bedingung, dass das erste Glied das Vorzeichen ändert mit α und dass also

$$\psi\alpha' = \alpha S\alpha\alpha' \mathsf{F}(T\alpha) + \alpha' F(T\alpha);$$

gibt man F hierin eine andere Form, so kann man schreiben

$$\psi\alpha' = \alpha S(\alpha' \nabla) f(T\alpha) + \alpha' F(T\alpha),$$

wo f und F beliebige Scalarfunctionen sind.

Hieraus

$$\varphi\alpha' = -S(\alpha_1 \nabla)[\alpha S(\alpha' \nabla) f(T\alpha) + \alpha' F(T\alpha)] + \frac{tV.\alpha' V\alpha\alpha_1}{T\alpha^3},$$

dies ist der gesuchte allgemeine Ausdruck.

b) Die möglichst einfache Form für die Wirkung eines Stromelements auf ein anderes ist also

$$\varphi\alpha' = \frac{tV.\alpha' V\alpha\alpha_1}{T\alpha^3}.$$

Zu bemerken ist, dass Ampère's *Directrix* für den Stromkreis α_1 ist

$$\vartheta = \int \frac{V\alpha\alpha_1}{T\alpha^3},$$

das Integral genommen über den Stromkreis. Schliesslich ist also

$$\varphi\alpha' = -tS\alpha_1 \nabla V\alpha' \vartheta.$$

c) Aus dem obigen allgemeinen Ausdruck können wir die symmetrische Form erhalten

$$\frac{tV.\alpha'\alpha\alpha_1}{T\alpha^3},$$

wenn wir setzen $f(T\alpha) = \text{const.}$, $F(T\alpha) = \frac{t}{T\alpha}$.

Hier ist die Wirkung von α' auf α_1 parallel und gleich der Wirkung von α_1 auf α'. Die Kräfte bilden ein Kräftepaar, denn α negativ genommen bildet die zweite Kraft; die gemeinsame Richtung dieser Kräfte wird durch den Vector gegeben, der nach der Ecke a eines sphärischen Dreiecks abc gezogen ist, dessen Seiten ab, bc, ca durch die Endpunkte von $U\alpha'$, $U\alpha$, $U\alpha_1$ halbirt werden. Man vergleiche Hamilton's *Lectures on Quaternions*, §§ 223—227.

d) Um Ampère's Ausdruck zu erhalten für die Wirkung eines Elementes auf ein anderes, schreibe man in der obigen allgemeinen Formel:

$$f(T\alpha) = \frac{t}{T\alpha}, \qquad F(T\alpha) = 0;$$

hieraus
$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}\varphi\alpha' &= -S\alpha_1 \nabla\left[-\frac{\alpha S\alpha\alpha'}{T\alpha^3}\right] + \frac{V.\alpha' V\alpha\alpha_1}{T\alpha^3}, \\
&= \frac{\alpha_1 S\alpha\alpha_1}{T\alpha_1} - \frac{\alpha S\alpha_1\alpha'}{T\alpha^3} - \frac{3\alpha S\alpha\alpha' S\alpha\alpha_1}{T\alpha^5} + \frac{V.\alpha' V\alpha\alpha_1}{T\alpha^3}, \\
&= +\frac{2\alpha}{T\alpha^5}(\alpha^2 S\alpha_1\alpha' - \tfrac{3}{2} S\alpha\alpha' S\alpha\alpha_1), \\
&= -\frac{2\alpha}{T\alpha^5}(S.V\alpha\alpha' V\alpha\alpha_1 + \tfrac{1}{2} S\alpha\alpha' S\alpha\alpha_1),
\end{aligned}$$

die gewöhnlichen Formeln.

e) Der Rest des Ausdrucks, der die willkürlichen Glieder enthält, hat noch die Form

$$-S(\alpha_1\nabla)[\alpha S(\alpha'\nabla)f(T\alpha)+\alpha' F(T\alpha)].$$

In der gewöhnlichen Bezeichnungsweise drückt dies eine Kraft aus, deren Componenten proportional sind mit

$$-r\frac{d^2f}{ds_1\,ds'}, \quad 1)\text{ in Richtung }\alpha,$$

$$\frac{dF}{ds_1}, \quad 2)\text{ parallel }\alpha',$$

$$\frac{-df}{ds'}, \quad 3)\text{ parallel }\alpha_1.$$

Nehmen wir $f=F=-Q$, so erhalten wir das Resultat von Clerk-Maxwell (*Electricity and Magnetism*, § 525); dies unterscheidet sich von dem obigen nur weil er annimmt, dass die Kraft, die ein Element auf das andere ausübt, wenn das erste parallel der Geraden ist, die die beiden verbindet, und das zweite auf dieser Geraden senkrecht steht, *gleich* ist der Kraft, die ausgeübt wird, wenn das erste auf dieser Geraden senkrecht steht und das zweite derselben parallel ist.

f) Das vorhergehende ist nur ein specieller Fall der folgenden interessanten Aufgabe.

Man gebe den allgemeinsten Ausdruck für die gegenseitige Wirkung zweier linearer Elemente, die bipolare Symmetrie besitzen, in der Längsrichtung, und die zerlegt und zusammengesetzt werden können nach dem gewöhnlichen kinematischen Gesetz.

Diese Annahmen sind gleichbedeutend mit I. und II. von Ampère. Behalten wir dieselbe Bezeichnungsweise bei wie in *a*), so muss die Kraft, die α_1 auf α' ausübt, ausdrückbar sein durch

$$\varphi\alpha',$$

wo φ eine lineare Vectorfunction ist, deren Theile linear und homogen in α_1 sind und daneben nur α enthalten.

Vertauschen wir α_1 mit α' und ändern wir das Zeichen von α, so erhalten wir die Kraft, die α' auf α_1 ausübt. Vertauschen wir in diesem Ausdruck wiederum α_1 und α' und ändern nur das Vorzeichen des Ganzen, so müssen wir wieder $\varphi\alpha'$ erhalten.

Wir haben also, da $\varphi\alpha'$ mit α das Vorzeichen wechselt,

$$\varphi\alpha'=P\alpha S\alpha_1\alpha'+Q\alpha S\alpha\alpha_1 S\alpha\alpha'+R\alpha_1 S\alpha\alpha'+\mathbf{R}\alpha' S\alpha\alpha_1,$$

wo P, Q, R, $\mathbf{R}$ Functionen von $T\alpha$ allein sind.

g) Das Vector-Kräftepaar, das α_1 auf α' ausübt, muss ausgedrückt werden können in der Form

$$V.\alpha'\omega\alpha_1,$$

wo ω eine neue lineare Vectorfunction ist, die allein von α abhängt. Die allgemeinste Form ist also

$$\omega\alpha_1 = P\alpha_1 + Q\alpha S\alpha\alpha_1,$$

wo P und Q Functionen von $T\alpha$ allein sind. Die Gestalt dieser Functionen in dem Ausdruck für die Kraft sowohl als für das Kräftepaar hängt von den Umständen eines jeden einzelnen Falles ab. Aus der Symmetrie folgt, dass es kein Glied gibt von der Form

$$RV\alpha\alpha_1.$$

h) Wir wählen das Beispiel, wo α_1 und α' Elemente eines Solenoids sind oder gleichmässig linear-magnetisirter Drähte; da geschlossene Solenoide oder Ringmagnete keine äussere Kraft ausüben, so ist

$$\varphi\alpha' = -S\alpha_1\nabla.\psi\alpha'.$$

Wir haben also eine andere Annahme an Stelle von Ampère's III. eingeführt. In dem Falle eines Solenoids gilt aber Newton's drittes Gesetz*. Es ist also

$$\varphi\alpha' = S\alpha_1\nabla S\alpha'\nabla.\chi\alpha,$$

wo χ eine lineare Vectorfunction ist und deshalb keine andere Form haben kann als

$$af T(\alpha).$$

Zwei Solenoide, die in einer Richtung sich ins Unendliche erstrecken, wirken nun aufeinander wie zwei magnetische Pole, so dass (und dies tritt an Stelle von Ampère's Annahme IV)

$$\chi\alpha = p\frac{\alpha}{T\alpha^3}.$$

Die Vectorkraft, die ein kleiner Magnet auf einen andern ausübt, ist also

$$pS\alpha_1\nabla S\alpha'\nabla\frac{\alpha}{T\alpha^3}.$$

i) Für das Kräftepaar, das das Element eines Solenoids oder eines gleichmässig und longitudinal magnetisirten Drahtes auf ein anderes ausübt, haben wir den Ausdruck

$$V.\alpha'\omega\alpha_1,$$

wo ω eine lineare Vectorfunction ist.

Hier sieht man zunächst, dass

$$\omega\alpha_1 = -S\alpha_1\nabla\frac{\alpha}{F(T\alpha)};$$

denn das Kräftepaar verschwindet für einen geschlossenen Strom,

---

* Dies Gesetz lautet: Bei jeder Wirkung ist immer eine gleiche und entgegengesetzte Gegenwirkung vorhanden, oder die Wirkungen, welche irgend zwei Körper aufeinander ausüben, sind immer gleich und entgegengesetzt gerichtet.

dessen Element α_1 ist, und das Integral von $\omega\alpha_1$ muss eine lineare Vectorfunction von α allein sein.

Man sieht leicht, dass in diesem Falle ist

$$F(T\alpha) \propto (T\alpha)^3.$$

j) Weiter: ist α_1 das Element eines Solenoids und α' ein Stromelement, so ist die Kraft

$$\varphi\alpha' = -S\alpha_1 \nabla . \psi\alpha',$$

wo $$\psi\alpha' = P\alpha' + Q\alpha S\alpha\alpha' + RV\alpha\alpha'.$$

Nun kann kein Theil eines Solenoids eine Kraft ausüben auf ein Stromelement in Richtung des Elementes, so dass

$$\varphi\alpha' = V.\alpha'\chi\alpha_1,$$

und $$P = 0, \qquad Q = 0,$$

also $$\varphi\alpha' = -S\alpha_1\nabla(RV\alpha\alpha').$$

Dies muss von der Dimension -1 sein, wenn wir integriren für die Wirkung eines Pols eines Solenoids, so dass

$$R = \frac{p}{T\alpha^3}.$$

Ist der Strom gerade und nach beiden Richtungen unbegrenzt und ist dessen Gleichung

$$\alpha = \beta + x\gamma,$$

wo $$T\gamma = 1 \quad \text{und} \quad S\beta\gamma = 0,$$

so erhalten wir für die Gesammtkraft, die der Pol eines Solenoids auf denselben ausübt:

$$p\beta\gamma \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(T\beta^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = -2p\beta^{-1}\gamma,$$

und dies ist in Uebereinstimmung mit bekannten Thatsachen.

k) Für das Kräftepaar, welches das Element eines Solenoids auf ein Stromelement ausübt, haben wir

$$V\alpha'\omega\alpha_1,$$

wo $$\omega\alpha_1 = -S\alpha_1\nabla.\psi\alpha;$$

man sieht, dass $$\psi\alpha = \frac{r\alpha}{T\alpha^3}.$$

l) In dem zuerst behandelten Falle ist das Kräftepaar, das ein Element auf das andere ausübt [*g*) oben],

$$V.\alpha'\omega\alpha_1,$$

wo $\pm\omega\alpha_1$ die Vectorkräfte sind, die an beiden Enden von α' angreifen. Die geleistete Arbeit, wenn α' die Richtung ändert, ist also

$$-S.\delta\alpha'\omega\alpha_1,$$

mit der Bedingung $$S.\alpha'\delta\alpha' = 0.$$

So lange es sich allein um die Richtungsänderung von α' handelt, hat die wechselseitig potentielle Energie der beiden Elemente die Form

$$S \,.\, \alpha' \omega \alpha_1 \,.$$

Dies liefert, mit Hilfe des Ausdrucks für ω in g), folgenden Werth

$$PS\alpha'\alpha_1 + QS\alpha\alpha' S\alpha\alpha_1 \,.$$

Integrirt man nun über den geschlossenen Strom, dessen Element α_1 ist, so hat man (nach § 447 weiter unten)

$$\begin{aligned} \int (PS\alpha'\alpha_1 + QS\alpha\alpha' S\alpha\alpha_1) &= \iint ds_1 S \,.\, U\nu_1 \nabla (P\alpha' + Q\alpha S\alpha\alpha'), \\ &= \iint ds_1 S \,.\, U\nu_1 \left(\frac{\alpha\alpha' P'}{T\alpha} - \alpha'\alpha Q\right), \\ &= \iint ds_1 S \,.\, U\nu_1 V\alpha\alpha' \Phi, \end{aligned}$$

wo

$$\Phi = \frac{P'}{T\alpha} + Q \,.$$

Integriren wir über den zweiten geschlossenen Strom, so haben wir für die wechselseitige potentielle Energie der beiden, insofern dieselbe von dem obigen Ausdrucke abhängt:

$$\iint ds_1 S \,.\, U\nu_1 \int V\alpha\alpha' \Phi = -\iint ds_1 S \,.\, U\nu_1 \iint ds' V \,.\, V(U\nu' \nabla)\alpha \Phi$$

$$= \iint ds_1 \iint ds' \left\{ S \,.\, U\nu_1 U\nu' (2\Phi + T\alpha \Phi') + S\alpha\, U\nu' S\alpha\, U\nu_1 \frac{\Phi'}{T\alpha} \right\}.$$

Nach Ampère's Satz, dass zwei geschlossene Ströme aufeinander wirken wie zwei magnetische Schalen, muss sein:

$$\iint ds_1 \iint ds' S \,.\, U\nu_1 \nabla S \,.\, U\nu' \nabla \frac{1}{T\alpha}$$

$$= \iint ds_1 \iint ds' \left(S \,.\, U\nu_1 U\nu' \frac{1}{T\alpha^3} + 3 S\alpha\, U\nu' S\alpha\, U\nu_1 \frac{1}{T\alpha^5} \right).$$

Vergleichen wir, so folgt

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{T\alpha^3} &= 2\Phi + T\alpha \Phi' \\ \frac{3}{T\alpha^3} &= T\alpha \Phi', \end{aligned}\right\}$$

dies liefert

$$\Phi = -\frac{1}{T\alpha^3}, \qquad \Phi' = \frac{3}{T\alpha'},$$

die nebeneinander bestehen können und die auf

$$\frac{P'}{T\alpha} + Q = -\frac{1}{T\alpha^3}.$$

führen. Setzen wir

$$Q = \frac{1-n}{2nT\alpha^3},$$

so folgt

$$P = \frac{1+n}{2nT\alpha},$$

und das wechselseitige Potential zweier Elemente hat die Form

$$(1+n)\frac{S\alpha'\alpha_1}{T\alpha} + (1-n)\frac{S\alpha\alpha' S\alpha\alpha_1}{T\alpha^3},$$

dies ist der Ausdruck, den Helmholtz anwendet in der Abhandlung: *Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität, Crelle* 1870, p. 76.

447.) Es sei $F(\gamma)$ das Potential eines beliebigen Systems auf die Masse Eins am Endpunkte von γ.

$$F(\gamma) = C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ist die Gleichung einer Niveaufläche.

Ist das Differential von (1)

$$S\nu d\gamma = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

dann ist ν die Vectornormale zu (1) und folglich die *Richtung* der Kraft.

Gehen wir zu einer benachbarten Niveaufläche über, so ist $S\nu\delta\gamma = \delta C$. Setzt man $\delta\gamma = x\nu$, dann folgt $-xT\nu^2 = \delta C$

oder
$$-T\nu = \frac{\delta C}{T\delta\gamma},$$

ν drückt also auch die Grösse der Kraft aus (§ 368).

Nach § 435 haben wir für die Vectorkraft, die ein kleiner ebener geschlossener Strom auf ein freies magnetisches Theilchen ausübt, den Ausdruck

$$-\frac{A}{T\gamma^3}\left(\varepsilon + \frac{3\gamma S\gamma\varepsilon}{T\gamma^2}\right),$$

wenn wir die Factoren weglassen, die sich auf die Stärke des Stroms und auf die Stärke des Magnetismus des Theilchens beziehen.

Nach (2) und (1) wird das Potential

$$\propto A\int\frac{1}{T\gamma^3}\left(S\varepsilon d\gamma + \frac{3S\gamma d\gamma S\gamma\varepsilon}{T\gamma^2}\right)$$

$$\propto \frac{AS\gamma\varepsilon}{T\gamma^3},$$

$$\propto \frac{\text{Flächeninhalt des Stromkreises senkrecht zu } \gamma \text{ projicirt}}{T\gamma^2},$$

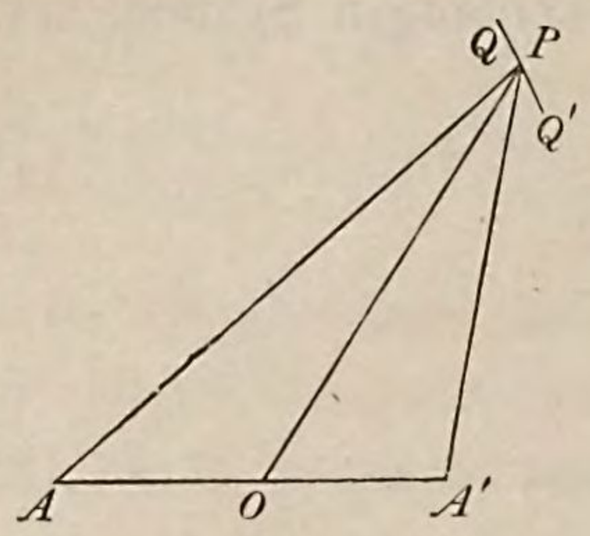
$\propto$ scheinbare Grösse des Stromes.

In der Integration wurde die Constante weggelassen, da das Potential für unendliche Werthe von $T\gamma$ verschwinden muss.

Ersetzt man nach Ampère's Vorstellungsweise einen endlichen Strom durch eine unendliche Zahl unendlich kleiner Ströme, so kann man jenes Resultat unmittelbar übertragen auf geschlossene endliche Ströme.

448.) Die Quaternionen liefern eine einfache Methode, die bekannten Eigenschaften der *magnetischen Curven* herzuleiten.

Es seien A und A' zwei magnetische Pole von gleicher Stärke; ihre Vectorentfernung 2α werde in O halbirt. QQ' sei ein unendlich kleiner Magnet, dessen Länge $2\varrho'$ ist, wo $\varrho = OP$. Nehmen wir die Momente, dann ist



$$\frac{V(\varrho+\alpha)\varrho'}{T(\varrho+\alpha)^3} = \pm\frac{V(\varrho-\alpha)\varrho'}{T(\varrho-\alpha)^3}.$$

Es gilt hier das obere oder das untere Zeichen, je nachdem die Pole denselben oder entgegengesetzten Magnetismus besitzen.

Operirt man mit $S.V\alpha\varrho$:

$$\frac{S\alpha\varrho'(\varrho+\alpha)^2 - S\alpha(\varrho+\alpha)S\varrho'(\varrho+\alpha)}{T(\varrho+\alpha)^3} = \pm\{\text{dasselbe mit } -\alpha\}$$

oder $$S.\alpha V\left(\frac{\varrho'}{\varrho+\alpha}\right)U(\varrho+\alpha) = \pm\{\text{dasselbe mit } -\alpha\}$$

d. h. $$S\alpha dU(\varrho+\alpha) = \pm S\alpha dU(\varrho-\alpha)$$

$$S\alpha\{U(\varrho+\alpha) \mp U(\varrho-\alpha)\} = \text{const.}$$

oder $$\cos\angle OAP \pm \cos\angle OA'P = \text{const.},$$

die bekannte Eigenschaft.

Sind die Pole ungleich, so muss das eine Glied zur Linken multiplicirt werden mit dem Verhältnisse ihrer Stärke.

449.) Ist der Vector eines beliebigen Punktes

$$\varrho = ix + jy + kz \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

so gibt es eine Menge physikalisch wichtiger und interessanter Umformungen, die auf der Wirkung des Quaternionenoperators

$$\nabla = i\frac{d}{dx} + j\frac{d}{dy} + k\frac{d}{dz} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

beruhen.

Ist die Function von ϱ eine Scalar, so liefert der Operator ∇ den Vector des schnellsten Anwachsens. Die Wirkung von ∇ auf eine Vectorfunction ist in § 369 kurz angedeutet.

450.) Wir beginnen mit einigen einfachen Beispielen, die nicht blos interessant sind, sondern auch von grossem Nutzen bei Umformungen.

$$\nabla\varrho = \left(i\frac{d}{dx} + \ldots\right)(ix + \ldots) = -3 \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\nabla T\varrho = \left(i\frac{d}{dx} + \ldots\right)(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{ix+jy+kz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\varrho}{T\varrho} = U\varrho \ldots (4)$$

$$\nabla(T\varrho)^n = n(T\varrho)^{n-1}\nabla T\varrho = n(T\varrho)^{n-2}\varrho \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

und $$\nabla\frac{1}{(T\varrho)^n} = -\frac{n\varrho}{(T\varrho)^{n+2}}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)^1$$

hieraus $$\nabla \frac{1}{T\varrho} = -\frac{\varrho}{T\varrho^3} = -\frac{U\varrho}{T\varrho^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

$$\nabla^2 \frac{1}{T\varrho} = -\nabla \frac{U\varrho}{T\varrho^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)^1$$

Weiter $$\nabla\varrho = -3 = T\varrho \nabla U\varrho + \nabla T\varrho \,.\, U\varrho = T\varrho \nabla U\varrho - 1$$

hieraus $$\nabla U\varrho = -\frac{2}{T\varrho} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

451.) Mit Hilfe dieser Resultate, von denen (6) besonders wichtig ist, und (4) und (7) sehr merkwürdig, können wir leicht die Wirkung von ∇ auf verwickeltere Functionen auffinden.

So haben wir

$$\nabla S\alpha\varrho = -\nabla(ax + \ldots) = -\alpha \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\nabla V\alpha\varrho = -\nabla V\varrho\alpha = -\nabla(\varrho\alpha - S\alpha\varrho) = 3\alpha - \alpha = 2\alpha \ldots (2)$$

Hieraus

$$\nabla \frac{V\alpha\varrho}{T\varrho^3} = \frac{2\alpha}{T\varrho^3} - \frac{3\varrho V\alpha\varrho}{T\varrho^5} = -\frac{2\alpha\varrho^2 + 3\varrho V\alpha\varrho}{T\varrho^5} = \frac{\alpha\varrho^2 - 3\varrho S\alpha\varrho}{T\varrho^5} \quad \ldots (3)$$

Hieraus

$$S.\delta\varrho \nabla \frac{V\alpha\varrho}{T\varrho^3} = \frac{\varrho^2 S\alpha\delta\varrho - 3S\alpha\varrho S\varrho\delta\varrho}{T\varrho^5} = -\frac{S\alpha\delta\varrho}{T\varrho^3} - \frac{3S\alpha\varrho S\varrho\delta\varrho}{T\varrho^5} = -\delta\frac{S\alpha\varrho}{T\varrho^3}. (4)$$

Dies ist eine, in vielen physikalischen Anwendungen sehr nützliche Transformation. Mit Hilfe von (6) kann man dem Ausdruck eine Form geben, die manchmal bequemer ist, nämlich

$$S.\delta\varrho \nabla \frac{V\alpha\varrho}{T\varrho^3} = \delta S.\alpha \nabla \frac{1}{T\varrho} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Zu bemerken ist, dass man auf der linken Seite S statt V setzen kann.

452.) Wir haben weiter

$$\nabla V.\beta\varrho\gamma = \nabla\{\beta S\gamma\varrho - \varrho S\beta\gamma + \gamma S\beta\varrho\} = -\gamma\beta + 3S\beta\gamma - \beta\gamma = S\beta\gamma \ldots (1)$$

Ist φ eine lineare Vectorfunction der Form

$$\varphi\varrho = \alpha + \Sigma V.\beta\varrho\gamma = m\varrho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

d. h. eine selbstconjugirte Function, der ein constanter Vector hinzugefügt wurde, dann ist

$$\nabla\varphi\varrho = \Sigma S\beta\gamma - 3m = \text{Scalar} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Daraus folgt, dass ein Integral von

$$\nabla\sigma = \text{Scalarconstante, ist } \sigma = \varphi\varrho \ldots\ldots\ldots (4)$$

Enthält der constante Werth von $\nabla\sigma$ einen Vectortheil, so kommen in dem Ausdrucke für σ Glieder der Form $V\varepsilon\varrho$ vor; es findet hier eine Deformation statt, die von einer Rotation begleitet ist (§ 371).

Eine Lösung von $\nabla q = a$, wo q und a Quaternionen sind, ist

$$q = S\zeta\varrho + V\varepsilon\varrho + \varphi\varrho.$$

Es ist für physikalische Anwendungen von grosser Wichtigkeit zu bemerken, dass nach (1) und (2) des § 451

$$\nabla (S + \tfrac{1}{2} V) \alpha \varrho = 0,$$

doch können wir hier nicht näher auf diesen Punkt eingehen.

453.) Es wäre leicht, noch viele derartige Transformationen anzuführen, die in der That keine Schwierigkeiten darbieten. Es genügt aber, an einigen Beispielen zu zeigen, wie leicht diese Ausdrücke sich auf physikalische Fragen anwenden lassen. Es ist dies eine sehr wichtige Eigenschaft, da die Erweiterung der mathematischen Physik weit werthvoller ist, als rein analytische oder geometrische Sätze.

Ist σ die Vectorverschiebung desjenigen Punktes eines homogenen elastischen festen Körpers, dessen Vector ϱ ist, so haben wir, wenn p der entsprechende Druck ist,

$$\nabla p + \nabla^2 \sigma = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

hieraus $$S \delta \varrho \nabla^2 \sigma = - S \delta \varrho \nabla p = \delta p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

ein vollständiges Differential.

Im allgemeinen $$p = k S \nabla \sigma$$

und ist der Körper incompressibel:

$$S \nabla \sigma = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Thomson hat gezeigt (Camb. and Dubl. Math. Journal II p. 62), dass die Kräfte, welche entstehen bei gegebener Vertheilung von Materie, Elektricität, Magnetismus oder galvanischer Ströme, in jedem Punkte ausgedrückt werden können durch Verschiebungen eines derartigen festen Körpers, die durch äussere Kräfte hervorgerufen werden können.

Es mag von Nutzen sein, diese Untersuchung mit einigen Erweiterungen in einer Quaternionenform zu geben, um zu zeigen, um wie vieles klarer die Sache wird durch die Einfachheit jener Methode.

454.) Ist z. B. $$S \sigma \delta \varrho = \delta \frac{1}{T \varrho},$$

so können wir beide Glieder gleich setzen

$$- S \delta \varrho \nabla \frac{1}{T \varrho}.$$

Dies liefert $$\sigma = - \nabla \frac{1}{T \varrho}$$

die Vectorkraft, die ein Massentheilchen oder freies Electricitätstheilchen auf ein anderes ausübt. Dieser Werth von σ genügt (2) und (3).

Weiter, wenn $S . \delta \varrho \nabla \sigma = \delta \frac{S \alpha \varrho}{T \varrho^3}$, so sind beide Glieder gleich

$$-S.\delta\varrho\nabla\frac{V\alpha\varrho}{T\varrho^3} \text{ nach (4) § 451.}$$

Ein specieller Fall ist $\sigma = -\frac{V\alpha\varrho}{T\varrho^3}$,

und dies ist die Vectorkraft, die ein Element α eines Stromes auf ein magnetisches Theilchen im Endpunkte des Vectors ϱ ausübt (§ 436).

455.) Weiter ist nach § 454 (3)

$$\nabla\frac{V\alpha\varrho}{T\varrho^3} = \frac{\alpha\varrho^2 - 3\varrho S\alpha\varrho}{T\varrho^5},$$

und aus §§ 435, 436 sehen wir, dass dies die Vectorkraft ist, die ein kleiner ebener Strom im Anfangspunkte, dessen Ebene senkrecht steht auf α, ausübt auf ein magnetisches Theilchen, oder auf den Pol eines Solenoids in ϱ. Da dieser Ausdruck ein reiner Vector ist, so stellt er eine elementare Rotation dar, die durch die Deformation des festen Körpers hervorgerufen wird; dieser Werth von σ genügt den Gleichungen (2) und (3) und jene Deformation kann also durch äussere Kräfte hervorgebracht werden.

Die Wirkung eines Stromelementes auf ein magnetisches Theilchen wird direkt durch eine Verschiebung ausgedrückt, während die Wirkung eines kleinen geschlossenen Stromes oder Magnetes ausgedrückt wird durch die Vectorachse der Drehung, die durch die Verschiebung hervorgerufen wird.

456.) Es sei

$$S\delta\varrho\nabla^2\sigma = \delta\frac{S\alpha\varrho}{T\varrho^3},$$

σ genügt offenbar (2) und das Glied auf der rechten Seite kann geschrieben werden

$$-S.\delta\varrho\nabla\frac{V\alpha\varrho}{T\varrho^3},$$

ein specieller Fall ist $\nabla\sigma = -\frac{V\alpha\varrho}{T\varrho^3}$

und dies genügt auch (3).

Die entsprechende Deformation kann also hervorgebracht werden durch äussere Kräfte, und $\nabla\sigma$ ist die Rotationsachse des Elementes in ϱ, und man sieht, wie oben, dass dieselbe die Vectorkraft darstellt, die ein Stromelement α im Anfangspunkte auf ein magnetisches Theilchen in ϱ ausübt.

457.) Es ist interessant zu bemerken, dass ein specieller Werth von σ in diesem Falle ist

$$\sigma = -\tfrac{1}{2}\nabla S\alpha U\varrho - \frac{\alpha}{T\varrho},$$

wie man durch Substitution nachweisen kann.

Weiter, wenn $$S\delta\varrho\sigma = -\delta\frac{S\alpha\varrho}{T\varrho^3},$$

so ist $$\sigma = \nabla\frac{S\alpha\varrho}{T\varrho^3}.$$

Da nun $\frac{S\alpha\varrho}{T\varrho^3}$ das Potential eines kleinen Magnetes α im Anfangspunkte auf ein freies magnetisches Theilchen in ϱ ist, so ist σ die entsprechende magnetische Kraft und stellt ebenfalls eine durch äussere Kräfte mögliche Deformation des elastischen Körpers dar; denn $\nabla\sigma = \nabla^2\sigma = 0$, und (2) und (3) sind erfüllt.

458.) Zum Schluss geben wir einige Quaternionenintegrationen, die in den wichtigsten physikalischen Aufgaben vorkommen.

Es mag von Nutzen sein, von einer Definition des Operationszeichen ∇ auszugehen, die ganz unabhängig ist von den gewöhnlichen Cartesischen Coordinaten. Zu diesem Zwecke schreiben wir

$$S.\alpha\nabla = -d_\alpha,$$

wo α ein Einheits-Vector sein soll. Das Glied auf der rechten Seite stellt dar, abgesehen vom Vorzeichen, die Grösse *der Aenderung der Function, auf die es angewandt wird*, für die Längeneinheit in Richtung des Einheits-Vectors α.

Ist α kein Einheits-Vector, so können wir es als Vectorgeschwindigkeit ansehen, und das Glied der rechten Seite bedeutet dann *die Aenderung in der Zeiteinheit*, die durch die Ortsveränderung hervorgerufen wird.

Sind α, β, γ ein beliebiges rechtwinkliges System von Einheits-Vectoren, dann haben wir nach einer fundamentalen Quaternionentransformation

$$\nabla = -\alpha S\alpha\nabla - \beta S\beta\nabla - \gamma S\gamma\nabla = \alpha d_\alpha + \beta d_\beta + \gamma d_\gamma;$$

dies ist identisch mit Hamilton's Form, die wir schon öfter angeführt haben (Lectures § 620).

459.) Aus dieser Anschauungsweise folgt unmittelbar, dass man durch Anwendung von ∇ auf eine Scalarfunction der Lage eines Punktes *den Vector der raschesten Aenderung* erhält.

Wendet man es auf ein Potential u an, so hat man

$$\nabla u = \text{Vectorkraft in } \varrho.$$

Ist u ein Geschwindigkeitspotential, so erhalten wir die Geschwindigkeit des Flüssigkeitstheilchens in ϱ; ist u die Temperatur eines leitenden Körpers, so erhalten wir den Wärmefluss.

Welche Reihe von Flächen auch dargestellt werden möge durch

$$u = C,$$

so ist stets der Vector ∇u normal zur Fläche im Punkte ϱ und

seine Länge ist umgekehrt proportional der normalen Entfernung zwischen zwei aufeinander folgenden Flächen.

Hieraus folgt $$S.d\varrho \nabla u = -du,$$

oder, wie man schreiben kann,

$$-S.d\varrho \nabla = d;$$

das Glied auf der linken Seite bezeichnet also eine totale Differentiation in Folge einer willkürlichen aber kleinen Verschiebung $d\varrho$.

460.) Um die Bedeutung von $V.\alpha\nabla$ zu finden, wollen wir diese Operation auf eine Potentialfunction u anwenden.

Wir sehen, dass u dann unter das Vectorzeichen genommen werden kann, und der Ausdruck

$$V(\alpha\nabla)u = V.\alpha\nabla u$$

bezeichnet das Vectorkräftepaar, welches entsteht durch die Kraft in ϱ um einen Punkt, dessen relativer Vector α ist.

Ist σ irgend eine Vectorfunction von ϱ, so erhalten wir durch gewöhnliche Quaternionenoperationen

$$V(\alpha\nabla).\sigma = S.\alpha V\nabla\sigma + \alpha S\nabla\sigma - \nabla S\alpha\sigma.$$

Die Bedeutung des dritten Gliedes (in welchem ∇ auf σ allein wirkt) folgt aus dem Vorhergehenden. Es bleibt noch die Bedeutung der andern Glieder zu erklären.

461.) Diese Glieder enthalten die überaus wichtigen Grössen (nicht *Operationszeichen* wie die Ausdrücke, die wir bis jetzt betrachtet haben)

$$S.\nabla\sigma \quad \text{und} \quad V.\nabla\sigma,$$

die die Grundlage unserer Untersuchung bilden. Wir wollen σ ansehen als die Verschiebung oder als die Geschwindigkeit eines in ϱ gelegenen Punktes; wir betrachten nun die Gruppe von Punkten in der Nähe von ϱ, da die zu betrachtenden Grössen sich auf die Deformation dieser Gruppe beziehen.

462.) Es sei τ der Vector eines Punktes der Gruppe in Bezug auf den Punkt in ϱ. Nach einem kurzen Zeitintervall t werden die wirklichen Coordinaten

$$\varrho + t\sigma$$

und $$\varrho + \tau + t(\sigma - S(\tau\nabla)\sigma)$$

nach der Definition von ∇ in § 458. Ist nun φ die lineare Vectorfunction, die die Deformation der Gruppe darstellt, so haben wir

$$\varphi\tau = \tau - tS(\tau\nabla)\sigma.$$

Die weitere Lösung wird sehr einfach, wenn wir t so klein nehmen, dass t^2 und die höhern Potenzen vernachlässigt werden können.

Ist φ' die φ conjugirte Function, so haben wir

$$\varphi'\tau = \tau - t\nabla S\tau\sigma.$$

Hieraus
$$\varphi\tau = \tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi')\tau + \tfrac{1}{2}(\varphi-\varphi')\tau$$
$$= \tau - \frac{t}{2}[S(\tau\nabla)\sigma + \nabla S\tau\sigma] - \frac{t}{2}V.\tau V\nabla\sigma.$$

Die drei ersten Glieder bilden eine selbstconjugirte Vectorfunction von τ, die wir mit $\omega\tau$ bezeichnen. Hieraus folgt

$$\varphi\tau = \omega\tau - \frac{t}{2}V.\tau V\nabla\sigma,$$

oder, indem man wie oben t^2 weglässt,

$$\varphi\tau = \omega\tau - \frac{t}{2}V.\omega\tau V\nabla\sigma.$$

Die Deformation kann also zerlegt werden in (1), die reine Deformation ω, (2) die Drehung

$$\frac{t}{2}V\nabla\sigma.$$

Die Vectorachse der Drehung der Gruppe ist also

$$\tfrac{1}{2}V\nabla\sigma.$$

Hätten wir uns damit begnügt, die gewöhnlichen Resultate der Cartesischen Untersuchungen zu benützen, so hätten wir sofort diese Folgerung ziehen können, indem wir bemerkten, dass

$$V\nabla\sigma = i\left(\frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz}\right) + j\left(\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx}\right) + k\left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy}\right),$$

und wie in § 362 die Formeln von Stokes und Helmholtz berücksichtigten.

463.) Da
$$S\nabla\sigma = -\frac{d\xi}{dx} - \frac{d\eta}{dy} - \frac{d\zeta}{dz},$$

erkennen wir auf dieselbe Weise die *cubische Compression* der betrachteten Punktgruppe. Man kann dies auf eine Form bringen, die mehr den Quaternionen entspricht, indem man die Definition des § 458 anwendet. Aber wenn wir mit Quaternionen arbeiten, sollen wir alle Resultate mit deren Hilfe allein erhalten; wir wollen also obiges Ergebniss beweisen, indem wir das Volumen des Ellipsoids suchen, zu welchem eine Punktgruppe, die ursprünglich eine Kugel ausfüllte, verzerrt wurde in der Zeit t.

Zu diesem Zwecke gehen wir zurück zur Deformationsgleichung

$$\varphi\tau = \tau - tS(\tau\nabla)\sigma,$$

und bilden die cubische Gleichung φ nach Hamilton's elegantem Verfahren.

Vernachlässigen wir t^2, so folgt*

$$0 = \varphi^3 - (3 - tS\nabla\sigma)\varphi^2 + (3 - 2tS\nabla\sigma)\varphi - (1 - tS\nabla\sigma),$$

oder
$$0 = (\varphi - 1)^2(\varphi - 1 + tS\nabla\sigma).$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind die Verhältnisse derjenigen Durchmesser des Ellipsoids, deren Richtungen unverändert bleiben, zu dem Durchmesser der Kugel.

Das Volumen ist also vergrössert um den Factor

$$1 - tS\nabla\sigma,$$

und die Richtigkeit der obigen Behauptung ist hiermit erwiesen.

464.) Da das Verfahren in dem vorhergehenden Paragraphen hauptsächlich auf dem Gebrauche einer nicht selbstconjugirten Vectorfunction beruht, die dem Leser vielleicht weniger geläufig ist als die gebräuchlicheren Formen, so geben wir noch eine andere Untersuchung.

Es sei
$$\omega = \varphi\tau = \tau - tS(\tau\nabla)\sigma.$$

Dann ist
$$\tau = \varphi^{-1}\omega = \omega + tS(\omega\nabla)\sigma.$$

Bildet nun die Gruppe vor der Deformation eine Kugel vom Radius 1, so haben wir

$$T\tau = 1;$$

die Gleichung des Ellipsoids ist

$$T(\omega + tS(\omega\nabla)\sigma) = 1$$

oder
$$\omega^2 + 2tS\omega\nabla S\omega\sigma = -1.$$

Dies kann man schreiben

---

* Sind λ, μ, ν drei beliebige nichtcomplanare Vectoren und m, m_1, m_2 die Coefficienten der cubischen Gleichung, so hat man nach Hamilton's Bezeichnungsweise:

$$\begin{aligned}
-mS.\lambda\mu\nu &= S.\varphi'\lambda\varphi'\mu\varphi'\nu \\
&= S.(\lambda - t\nabla S\lambda\sigma)(\mu - t\nabla S\mu\sigma)(\nu - t\nabla S\nu\sigma) \\
&= S.(\lambda - t\nabla S\lambda\sigma)(V\mu\nu - tV\mu\nabla S\nu\sigma + tV\nu\nabla S\mu\sigma) \\
&= S.\lambda\mu\nu - t[S.\mu\nu\nabla S\lambda\sigma + S.\nu\lambda\vee S\mu\sigma + S.\lambda\mu\nabla S\nu\sigma] \\
&= S.\lambda\mu\nu - tS.[\lambda S.\mu\nu\nabla + \mu S.\nu\lambda\nabla + \nu S.\lambda\mu\nabla]\sigma \\
&= S.\lambda\mu\nu - tS.\lambda\mu\nu S\nabla\sigma.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_1 S\lambda\mu\nu &= S.\lambda\varphi'\mu\varphi'\nu + S.\mu\varphi'\nu\varphi'\lambda + S.\nu\varphi'\lambda\varphi'\mu \\
&= S.\lambda(V\mu\nu - tV\mu\nabla S\nu\sigma + tV\nu\nabla S\mu\sigma) + \ldots \\
&= S.\lambda\mu\nu - tS.\lambda\mu\nabla S\nu\sigma - tS.\nu\lambda\nabla S\mu\sigma + \ldots \\
&= 3S.\lambda\mu\nu - 2tS\nabla\sigma S.\lambda\mu\nu.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-m_2 S\lambda\mu\nu &= S.\lambda\mu\varphi'\nu + S.\mu\nu\varphi'\lambda + S.\nu\lambda\varphi'\mu \\
&= S.\lambda\mu\nu - tS.\lambda\mu\nabla S\nu\sigma + \ldots \\
&= 3S.\lambda\mu\nu - tS\nabla\sigma S.\lambda\mu\nu.
\end{aligned}$$

$$S.\omega\chi\omega = S.\omega(\omega + t\nabla S\omega\sigma + tS(\omega\nabla)\sigma) = -1,$$

wo χ jetzt selbstconjugirt ist.

Hamilton hat gezeigt, dass die Reciproke des Productes der Quadrate der Halbachsen ist

$$-S.\chi i\chi j\chi k,$$

welches System von rechtwinkligen Einheits-Vectoren man auch bezeichnet mit i, j, k.

Führen wir den Werth von χ ein, so folgt:

$$\begin{aligned}
&-S.(i + t\nabla Si\sigma + tS(i\nabla)\sigma)(j + \ldots)(k + \ldots)\\
&= -S.(i + t\nabla Si\sigma + tS(i\nabla)\sigma)(i + 2tiS\nabla\sigma - tS(i\nabla)\sigma - t\nabla Si\sigma)\\
&= 1 + 2tS\nabla\sigma.
\end{aligned}$$

Das Verhältniss der Volumina des Ellipsoids und der Kugel ist also wie oben

$$\frac{1}{\sqrt{1 + 2tS\nabla\sigma}} = 1 - tS\nabla\sigma.$$

465.) In dem folgenden Paragraphen haben wir beständig zu thun mit Integralen, die über eine geschlossene Fläche genommen sind, verglichen mit andern, die über den Raum genommen sind, den jene Flächen einschliessen; oder mit Integralen über eine begrenzte Fläche, verglichen mit andern, die genommen sind über die Begrenzungscurve. Die Bezeichnungsweise, die wir anwenden wollen, ist folgende. Ist Q die zu summirende Grösse, bezogen auf die Einheit der Länge, Fläche oder des Volumens, in dem Punkte ϱ, wo Q eine beliebige Quaternion ist, so bezeichnen wir diese Summen mit

$$\iint Q ds \quad \text{und} \quad \iiint Q d\mathrm{s},$$

wenn wir Integrale vergleichen, von denen die einen über eine geschlossene Fläche, die andern über einen geschlossenen Raum genommen sind; und mit

$$\iint Q ds \quad \text{und} \quad \int QTd\varrho,$$

wenn wir Integrale über eine geschlossene Fläche vergleichen mit Integralen über die Begrenzungscurve.

Es kann kein Missverständniss entstehen durch die doppelte Bedeutung von

$$\iint Q ds,$$

denn in jedem einzelnen Falle wird der Sinn desselben klar werden durch das Integral, mit welchem es verglichen wird.

466.) Wir haben eben gezeigt, dass, wenn σ die Vectorverschiebung eines Punktes ist, der sich ursprünglich befand in

$$\varrho = ix + jy + kz,$$

dass dann $S.\nabla\sigma$

der Zuwachs der Dichtigkeit ist, der in dem System von Punkten durch die Verschiebung hervorgerufen wird.

467.) Man denke sich nun den Raum gleichmässig mit Punkten angefüllt und eine geschlossene Fläche Σ gezogen, durch welche sich die Punkte frei bewegen können, wenn sie verschoben werden. Man kann nun den Zuwachs an Punkten innerhalb jener Fläche Σ, der von einer Verschiebung herrührt, durch zwei verschiedene Methoden erhalten: indem man den Zuwachs an Dichtigkeit in allen Punkten innerhalb von Σ berücksichtigt, oder indem man anmerkt, wieviel mehr Punkte nach innen durch die Fläche gehen, als nach aussen. Nach diesem Grundsatz verfährt man gewöhnlich bei einem Volumelement, um die sogenannte „Continuitätsgleichung“ zu bilden.

Es sei ν die nach aussen gezogene Normale zu Σ in dem Punkte ϱ; setzen wir nun die zwei verschiedenen Ausdrücke für dieselbe Grösse, wie wir eben auseinander gesetzt haben, einander gleich, so folgt

$$\iiint S . \nabla \sigma d\mathbf{s} = \iint S . \sigma U \nu ds;$$

dies ist unsere fundamentale Gleichung, so lange wir es mit dreifachen Integralen zu thun haben.

468.) Wir wollen zuerst ein sehr einfaches Beispiel der Anwendung dieser Gleichung behandeln. σ sei die Vectorkraft, die in ϱ auf ein Einheitstheilchen von gewöhnlicher Materie, Elektricität oder Magnetismus wirkt; diese Kraft werde hervorgerufen durch eine beliebige Vertheilung von anziehender Materie, Electricität oder Magnetismus zum Theil innerhalb der Fläche Σ, zum Theil ausserhalb der Fläche. Ist nun P das Potential in ϱ, dann ist

$$\sigma = \nabla P,$$

und ist r die Dichtigkeit der Materie u. s. w.

$$\nabla \sigma = \nabla^2 P = 4\pi r,$$

nach Poisson's Erweiterung der Gleichung von Laplace.

Führen wir dies in die Fundamentalgleichung ein, so erhalten wir

$$4\pi \iiint r d\mathbf{s} = 4\pi M = \iint S . \nabla P U \nu ds,$$

wo M die ganze Menge der Materie u. s. w. bedeutet, die sich innerhalb von Σ befindet. Es ist dies ein bekannter Satz.

469.) Es seien P und P_1 beliebige Scalarfunctionen von ϱ; wir können dann die Vertheilung der Materie u. s. w. finden, die eine jede dieser Functionen zum Potential in ϱ macht. Denn sind die nothwendigen Dichtigkeiten r und r_1, so haben wir wie oben

$$\nabla^2 P = 4\pi r, \qquad \nabla^2 P_1 = 4\pi r_1.$$

Nun ist $$\nabla(P \nabla P_1) = \nabla P \nabla P_1 + P \nabla^2 P_1 .$$

Setzen wir nun in obiger Formel

$$\sigma = P \nabla P_1,$$

so folgt

$$\iiint S . \nabla P \nabla P_1 d\mathbf{s} = -\iiint P \nabla^2 P_1 d\mathbf{s} + \iint PS . \nabla P_1 U v ds,$$
$$= -\iiint P_1 \nabla^2 P d\mathbf{s} + \iint P_1 S . \nabla P U v ds,$$

und dies sind die gewöhnlichen Formen des Green'schen Satzes. Die Erweiterung desselben von Sir W. Thomson folgt unmittelbar aus diesem Beweise.

470.) Ist P_1 eine mehrwerthige Function, ∇P_1 hingegen eine einwerthige, und ist Σ ein mehrfach zusammenhängender Raum, so bedürfen obige Ausdrücke einer Abänderung, deren Nothwendigkeit Helmholtz zuerst nachgewiesen hat; diese Abänderung hat Thomson zuerst vorgenommen.

Der Einfachheit wegen nehme man an, Σ sei zweifach zusammenhängend (wie ein Ring oder eine unendliche Röhre, dieselbe kann verschlungen sein oder nicht). Wird Σ nun durch eine Fläche s geschnitten, so wird der Raum einfach zusammenhängend, aber den Flächenintegralen hat man Glieder hinzuzufügen, die abhängen von Theilen, die auf diese Weise der Gesammtfläche hinzugefügt wurden.

In der ersten Form des Green'schen Satzes erleidet nur das letzte Glied hierdurch eine Aenderung, und ist p_1 der Zuwachs, den P_1 erleidet nach einer vollständigen Beschreibung des Ringes, so hat man auf der rechten Seite der Gleichung hinzuzufügen:

$$p_1 \cdot \iint S . \nabla P U v ds,$$

genommen allein über die schneidende Fläche.

Aehnliche Abänderungen werden nöthig, wenn der Raum Σ mehr als zweifach zusammenhängend ist.

471.) Die unmittelbaren Folgen des Green'schen Satzes sind wohlbekannt, wir behandeln nur ein einziges Beispiel.

Es seien P und P_1 die Potentiale derselben Vertheilung der Materie und kein Theil der Materie liege innerhalb von Σ. Wir haben dann

$$\iiint (\nabla P)^2 d\mathbf{s} = \iint PS . \nabla P U v ds;$$

ist ∇P Null an der ganzen Oberfläche von Σ, so ist es auch Null innerhalb des ganzen Raumes von Σ, d. h. das Potential ist constant im Innern von Σ. Ist P das Geschwindigkeitspotential in der nicht-Wirbelbewegung einer incompressibeln Flüssigkeit, so zeigen diese Gleichungen, dass keine derartige Bewegung der Flüssigkeit eintreten kann, wenn nicht in einem Theile eine Bewegung

senkrecht zur Begrenzungsfläche stattfindet (vorausgesetzt, dass Σ einfach zusammenhängend ist).

Ist Σ eine Fläche gleichen Potentials, dann ist nach dem Fundamentalsatz

$$\iiint (\nabla P)^2 d\mathbf{s} = P \iint S . \nabla P U\nu ds = P \iiint \nabla^2 P d\mathbf{s}.$$

Der Annahme nach befindet sich aber keine Materie innerhalb von Σ, das Potential ist also constant im Innern. Es gibt also keine Fläche gleichen Potentials, die keinen Theil der anziehenden Materie umschliesst, innerhalb welcher das Potential sich ändern könnte. Das Potential kann also nicht ein Maximum oder Minimum haben in einem Punkte, in dem sich keine Materie befindet.

472.) In dem Fundamentalsatz nehmen wir an

$$\sigma = \nabla \tau,$$

welches bedingt

$$S . \nabla \sigma = 0,$$

d. h. die σ-Verschiebung soll stattfinden ohne Condensation; jene Gleichung wird

$$\iint S . \nabla \tau U\nu ds = \iiint S . \nabla^2 \tau d\mathbf{s} = 0.$$

Man denke sich eine beliebige geschlossene Curve auf Σ gezogen, die diese Fläche in zwei Theile zerlegt. Diese Gleichung zeigt, dass das Flächenintegral dasselbe ist für beide Theile; der Unterschied im Vorzeichen rührt daher, dass die Normalen entgegengesetzte Richtungen haben in den zwei Theilen. Wir sehen also, dass, mit der obigen Beschränkung des Werthes von σ, das Doppelintegral dasselbe ist für alle Flächen, die durch eine gegebene geschlossene Curve begrenzt werden; es muss also ausdrückbar sein durch ein einfaches Integral, das über die Curve genommen ist. Den Werth dieses Integrals wollen wir jetzt bestimmen.

473.) Den Satz von § 467 kann man schreiben

$$\iiint \nabla^2 P d\mathbf{s} = \iint S . U\nu \nabla P ds = \iint S (U\nu \nabla) P ds.$$

Ist nun $\sigma = iP + jP_1 + kP_2$ (ein beliebiger Vector), so folgt aus obiger Gleichung

$$\iiint \nabla^2 \sigma d\mathbf{s} = \iint S (U\nu \nabla) \sigma ds;$$

oder, wenn

$$\nabla^2 \sigma = \tau,$$

$$\iiint \tau d\mathbf{s} = \iint S (U\nu \nabla^{-1}) \tau ds.$$

Dies liefert uns ein Mittel, durch ein Flächenintegral ein Vectorintegral darzustellen, das über einen gewissen Raum genommen ist.

Wir haben schon gesehen, wie wir dies für ein Scalarintegral erreichen, wir können also jetzt in dieser Weise das allgemeine Integral

$$\iiint q d\mathbf{s}$$

darstellen, wo q eine beliebige Quaternion ist. (Es bleibt hier noch eine Doppeldeutigkeit, auf die wir später eingehen.)

Man kann natürlich nur in gewissen Classen von Fällen ein solches Volumintegral durch ein Flächenintegral vollständig bestimmt ausdrücken.

474.) In obiger Formel für ein Vectorintegral kann ein Doppelsinn entstehen durch die inverse Operation

$$\nabla^{-1},$$

der wir einige Worte widmen wollen. Die Annahme

$$\nabla^2 \sigma = \tau$$

heisst so viel als: da in σ die Potentiale einer gewissen Vertheilung von Materie eingehen, so gehen in τ die entsprechenden Dichtigkeiten ein, eine jede multiplicirt mit 4π.

Ist also τ gegeben innerhalb des Raumes, den Σ einschliesst, so ist σ durch diese Gleichung gegeben *nur insofern* es von der Vertheilung innerhalb von Σ abhängt, und muss vervollständigt werden durch einen willkürlichen Vector, der abhängt von *drei* Potentialen von drei von einander unabhängigen Vertheilungen ausserhalb von Σ.

Ist aber σ gegeben, so hat τ einen bestimmten Werth, und da

$$\nabla \sigma = \nabla^{-1} \tau,$$

so ist auch ∇^{-1} vollkommen bestimmt.

Diese Bemerkungen muss man sorgfältig berücksichtigen, will man obigen Satz benutzen; sie führen nämlich als specielle Fälle in der Anwendung auf manche merkwürdige Sätze der Bewegung von Flüssigkeiten u. s. w.

475.) Als specieller Fall liefert die Gleichung

$$V \nabla \sigma = 0$$

$$\nabla \sigma = u, \quad \text{eine Scalar.}$$

Ist nun v das Potential einer Vertheilung, deren Dichtigkeit u ist, so haben wir

$$\nabla^2 v = 4\pi u.$$

Wir wissen, dass diese Gleichung einen und nur einen bestimmten Werth für v liefert. Die Gleichung

$$v = 4\pi \nabla^{-2} u$$

enthält also keinen Doppelsinn, und auch $\sigma = \frac{1}{4\pi} \nabla v$ ist vollkommen bestimmt.

476.) Hieraus erkennt man die Natur des willkürlichen Gliedes, das eingeführt werden muss in die Lösung der Gleichung

$$V \nabla \sigma = \tau.$$

Diese Gleichung lösen heisst (§ 462) die Verschiebung eines Punktes einer Gruppe finden, wenn die entsprechende Rotation gegeben ist.

Hier ist $$S\nabla\tau = S.\nabla V\nabla\sigma = S\nabla^2\sigma = 0;$$

lässt man das willkürliche Glied (§ 475) weg, so folgt

$$\nabla^2\sigma = \nabla\tau,$$

und σ ist wie oben vollständig bestimmt.

Thomson* hat der Lösung eine Form gegeben, die man schreiben kann

$$\sigma = \tfrac{1}{3}\int V\tau\,\mathbf{d}\varrho + \nabla u,$$

wenn wir unter $\int(\ )\mathbf{d}\varrho$ eine Integration des Gliedes in $\mathbf{d}x$ verstehen, bei welcher y und z constant bleiben u. s. w. Berücksichtigen wir dies, so haben wir zur Verification

$$V\nabla\sigma = \tfrac{1}{3}\Sigma Vi\left\{V\tau i + \int V\frac{d\tau}{dx}\,\mathbf{d}\varrho\right\}$$

$$= \tfrac{1}{3}\left\{2\tau + \Sigma\int\frac{d\tau}{dx}\,\mathbf{d}x + \Sigma\int\mathbf{d}\varrho\,Si\frac{d\tau}{dx}\right\}$$

$$= \tfrac{1}{3}\{3\tau + \int d\varrho S\nabla\tau\} = \tau.$$

477.) Wir kommen nun zu Beziehungen zwischen den Ergebnissen von Integrationen, die sich über eine ungeschlossene Fläche und über ihre Begrenzung erstrecken. (Der Deutlichkeit wegen setzen wir mehr Punkte als absolut nöthig sind.)

σ sei eine beliebige Vectorfunction der Lage eines Punktes. Das Linienintegral, dessen Werth wir suchen als Fundamentalsatz, ist

$$\int S.\sigma d\tau,$$

wo τ der Vector eines beliebigen Punktes ist, innerhalb einer kleinen geschlossenen Curve; dieser Vector geht aus von einem Punkte innerhalb der Curve und in deren Ebene.

Es sei σ_0 der Werth von σ im Anfangspunkte von τ, dann ist

$$\sigma = \sigma_0 - S(\tau\nabla)\sigma_0,$$

so dass $$\int S.\sigma d\tau = \int S.(\sigma_0 - S(\tau\nabla)\sigma_0)d\tau.$$

Nun ist $$\int d\tau = 0,$$

da die Curve geschlossen ist. Und allgemein haben wir (§ 442)

$$\int S.\tau\nabla S.\sigma_0 d\tau = \tfrac{1}{2}S.\nabla(\tau S\sigma_0\tau - \sigma_0\int V.\tau d\tau).$$

Der integrirte Theil verschwindet für eine geschlossene Curve und

$$\tfrac{1}{2}\int V.\tau d\tau = ds\,Uv,$$

wo ds der Flächeninhalt der kleinen geschlossenen Curve ist und Uv ein Einheits-Vector senkrecht auf deren Ebene. Hieraus

$$\int S.\sigma_0 d\tau = S.\nabla\sigma_0 Uv.ds.$$

---

* *Electrostatics and Magnetism* § 521, oder *Phil. Trans.* 1852.

Nun kann jeder Theil einer endlichen Fläche zerlegt werden in kleine Elemente, wie das oben behandelte; das Vorzeichen allein des Integrals, genommen über jeden Theil einer Begrenzungscurve, ändert sich, wenn wir in der entgegengesetzten Richtung fortschreiten.

Wir folgen nun dem Beispiele Ampère's, der an Stelle eines geschlossenen endlichen Stromes ein Netz von einer unendlichen Zahl unendlich kleiner Ströme setzt; in je zwei aneinander stossenden Stromkreisen wird die gemeinschaftliche Grenze von gleichen Strömen in entgegengesetzter Richtung durchflossen. Wir erhalten so für eine endliche ungeschlossene Fläche

$$\int S.\sigma d\varrho = \iint S.\nabla\sigma\, Uv\,.ds.$$

Man kann dies ohne Schwierigkeit ausdehnen auf Fälle, in denen die Begrenzungscurve aus getrennten Ovalen besteht oder mehrfache Punkte besitzt.

Dieser Satz scheint zuerst von Stokes gegeben worden zu sein (*Smith's Prize Exam.* 1854) in der Gestalt

$$\int(\alpha dx + \beta dy + \gamma dz)$$

$$= \iint ds\left(l\left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}\right) + m\left(\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx}\right) + n\left(\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}\right)\right).$$

Dies löst die Aufgabe, auf die das Ergebniss des § 472 hinweist.

478.) Stellt σ die Vectorkraft dar, die auf ein Theilchen von Materie in ϱ ausgeübt wird, so stellt $-S.\sigma d\varrho$ die Arbeit dar, die geleistet wird, wenn das Theilchen um $d\varrho$ verschoben wird, so dass das einfache Integral

$$\int S.\sigma d\varrho$$

des vorhergehenden Paragraphen die Arbeit darstellt, die bei einem ganzen Cyklus geleistet wird. Verschwindet dies Integral, und theilt man den Integrationsweg in zwei Theile, so ist die geleistete Arbeit in der Bewegung des Theilchens auf dem einen Wege gleich der gewonnenen Arbeit auf dem andern Wege. Das Kräftesystem muss also conservativ sein, d. h. es muss dieselbe Arbeit für alle Wege leisten, die dieselben Endpunkte haben.

Das gleichbedeutende Doppelintegral muss ebenfalls verschwinden. Ein conservatives System ist also ein solches, dass

$$\iint ds S.\nabla\sigma\, Uv = 0,$$

welches auch die Gestalt des endlichen Theiles der Fläche sei, dessen Element ds ist.

Da nun $\nabla\sigma$ einen bestimmten Werth in jedem Punkte des Raumes hat, während Uv beliebig verändert werden kann, so muss

$$V \nabla \sigma = 0$$

oder
$$\nabla \sigma = \text{Scalar}.$$

Nennen wir X, Y, Z die Componenten der Kräfte in Richtung rechtwinkliger Achsen, so ist diese ausserordentlich einfache Gleichung gleichbedeutend mit den bekannten Bedingungen

$$\frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx} = 0, \quad \frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy} = 0, \quad \frac{dZ}{dx} - \frac{dX}{dz} = 0.$$

Kehren wir zurück zur Quaternionenform als der weit einfachern, so sehen wir, dass

$$\nabla \sigma = \text{Scalar} = 4\pi r,$$

wie wir schreiben wollen, einschliesst:

$$\sigma = \nabla P,$$

wo P eine Scalar ist, so dass

$$\nabla^2 P = 4\pi r;$$

das heisst P ist das Potential einer Vertheilung von Materie, Magnetismus oder statischer Electricität, deren Volumdichte r ist.

Für einen ungeschlossenen Weg und conservative Kräfte hat man also

$$\begin{aligned} -\int S.\sigma d\varrho &= -\int S.\nabla P d\varrho \\ &= -\int S(d\varrho \nabla) P \\ &= \int d_{d\varrho} P = \int dP \\ &= P_1 - P_0, \end{aligned}$$

allein abhängig von den Werthen von P an den Endpunkten des Weges.

479.) Einen sehr nützlichen Satz, der sich auf Vectoren bezieht und der dem Satz über Scalaren (§ 477) entspricht, erhält man wie folgt (wir behalten die obige Bezeichnungsweise bei):

$$\begin{aligned} \int V.\sigma d\tau &= \int V(\sigma_0 - S(\tau \nabla)\sigma_0) d\tau, \\ &= -\int S(\tau \nabla) V.\sigma_0 d\tau. \end{aligned}$$

Nun ist $V(V.\nabla V.\tau d\tau)\sigma_0 = -S(\tau\nabla) V.\sigma_0 d\tau - S(d\tau\nabla) V\tau\sigma_0,$

und $d(S(\tau\nabla) V\sigma_0\tau) = S(\tau\nabla) V.\sigma_0 d\tau = S(d\tau\nabla) V\sigma_0\tau.$

Subtrahirt man und lässt das Glied fallen, das an den Grenzen den gleichen Werth hat, so folgt

$$\int V.\sigma d\tau = -V.(V.U\nu\nabla)\sigma_0 ds.$$

Dehnt man dies wie oben auf eine beliebige geschlossene Fläche aus so erhalten wir die Form

$$\int V.\sigma d\varrho = -\iint ds V.(V.U\nu\nabla)\sigma.$$

Versucht man ein Quaternionen-Flächenintegral auszudrücken durch ein Integral, das über die Begrenzungscurve genommen ist,

so können wir über die Bedeutung des Integrals im Zweifel sein, wie im Falle des Raumintegrals in § 474; der Ursprung dieses Doppelsinnes ist gewöhnlich leicht zu erklären, analytisch sowohl als physikalisch.

480.) Ist P eine beliebige Scalarfunction von ϱ, so haben wir, nach dem Process von § 477,

$$\int P d\tau = \int (P_0 - S(\tau\nabla) P_0)\, d\tau$$
$$= -\int S.\tau\nabla P_0 . d\tau .$$

Nun ist aber $V.\nabla V.\tau d\tau = d\tau S.\tau\nabla - \tau S.d\tau\nabla$,

und $d(\tau S\tau\nabla) = d\tau S.\tau\nabla + \tau S.d\tau\nabla$.

Dies liefert

$$\int P d\tau = -\tfrac{1}{2}(\tau S\tau\nabla - V.V(\tau d\tau)\nabla) P_0 = ds\, V.Uv\nabla P_0 ;$$

für eine geschlossene Curve von beliebiger Gestalt haben wir

$$\int P d\varrho = \iint ds\, V.Uv\nabla P,$$

und aus diesem Ausdrucke kann man die Sätze der §§ 477, 479 herleiten.

481.) Gehen wir wiederum von dem fundamentalen Satze aus

$$\iiint S\nabla\sigma d\mathbf{s} = \iint S.\sigma Uv ds,$$

und setzt $\sigma = u\beta$,

so folgt $\iiint S\beta\nabla u d\mathbf{s} = \iint uS.\beta Uv ds.$

Hieraus $\iiint \nabla u d\mathbf{s} = \iint uUv ds$ . . . . . (1)

oder $\iiint \nabla \tau d\mathbf{s} = \iint Uv.\tau ds$ . . . . . (2)

Setzen wir $u_1\tau$ an Stelle von τ und nehmen die Scalar, so haben wir

$$\iiint (S\tau\nabla u_1 + u_1 S\nabla\tau) d\mathbf{s} = \iint u_1 S\tau Uv ds;$$

hieraus $\iiint (S(\tau\nabla)\sigma + \sigma S.\nabla\tau) d\mathbf{s} = \iint \sigma S\tau Uv ds$ . . . . . (3)

482.) Als Beispiel der wichtigen Folgerungen, die sich aus diesen einfachen Formeln ergeben, wählen wir das folgende:

$$\iint V.(V\sigma Uv)\tau ds = \iint \sigma S\tau Uv ds - \iint Uv S\sigma\tau ds;$$

aus (3) und (1) sehen wir, dass das Glied auf der rechten Seite geschrieben werden kann

$$= \iiint (S(\tau\nabla)\sigma + \sigma S\nabla\tau - \nabla S\sigma\tau) d\mathbf{s}$$
$$= -\iiint V.V(\nabla\sigma)\tau d\mathbf{s}.$$ . . . . . (4)

Diese und ähnliche Formeln eignen sich sehr, um das Potential und die Vectorkraft zu finden, die entstehen durch verschiedene Vertheilungen von Magnetismus. Um zu zeigen, wie derartige Aufgaben behandelt werden, wollen wir kurz angeben, wie man das Potential einer Vertheilung ausdrückt.

483.) Es sei σ der Vector, der die Intensität und die Richtung

des Magnetismus, der Volumeinheit, in dem Elemente ds angibt. Wird der Magnet nun in das Gebiet der magnetischen Kraft gebracht, deren Potential u ist, so erhalten wir die potentielle Energie

$$E = -\iiint S\sigma \nabla u ds$$
$$= \iiint uS\nabla\sigma\, ds - \iint uS\sigma Uv ds.$$

Hieraus folgt unmittelbar, dass der Magnetismus zerlegt werden kann in eine Volumdichte $S(\nabla\sigma)$ und eine Oberflächendichte $-S\sigma Uv$. Für eine Solenoidvertheilung hat man

$$S.\nabla\sigma = 0.$$

Was Thomson nennt „lamellar distribution“ (*Phil. Trans.* 1852) verlangt, dass

$$S\sigma d\varrho$$

integrabel sei ohne Factor, d. h. dass

$$V\nabla\sigma = 0.$$

Eine complexe „lamellar distribution“ verlangt, dass derselbe Ausdruck integrabel sei mit Hilfe eines Factors. Ist dieser Factor u, so folgt

$$V\nabla(u\sigma) = 0,$$

oder

$$S.\sigma\nabla\sigma = 0.$$

Nachdem wir dies vorausgeschickt haben, sehen wir unmittelbar, dass (4) geschrieben werden kann

$$\iint V.(V\sigma Uv)\tau ds = -\iiint V.\tau V\nabla\sigma ds - \iiint V.\sigma\nabla\tau ds + \iiint S\sigma\nabla.\tau ds.$$

Ist nun

$$\tau = \nabla\left(\frac{1}{r}\right),$$

wo r die Entfernung sei zwischen einem beliebigen äussern Punkte und dem Elemente ds, so ist das letzte Glied auf der rechten Seite die Vectorkraft, die der Magnet ausübt auf einen Einheitspol in jenem Punkte. Das zweite Glied auf der rechten Seite verschwindet nach der Gleichung von Laplace, und das erste Glied verschwindet, wie oben, wenn die Vertheilung des Magnetismus lamellar ist; wir erhalten somit das Ergebniss von Thomson in Gestalt eines Flächenintegrals.

484.) Man kann eine ähnliche Transformation anwenden auf Ampère's „directrice de l'action électrodynamique“, die nach § 432 das Vectorintegral ist

$$\int^{\circ} \frac{V\varrho d\varrho}{T\varrho^3},$$

wo $d\varrho$ ein Element eines geschlossenen Stromes ist, und die Integration sich erstreckt über den Stromkreis. Dies kann man schreiben

$$-\int^{\circ} V.(d\varrho\nabla)\frac{1}{r},$$

so dass dessen Werth als Flächenintegral ist

$$\iint S(Uv\nabla)\nabla\frac{1}{r}\,ds - \iint Uv\nabla^2\frac{1}{r}\,ds.$$

Das letzte dieser Glieder verschwindet, ausser wenn der Anfangspunkt in der Fläche liegt, über welche sich die Doppelintegration erstreckt oder unendlich nahe an derselben liegt. Aus dem vorhergehenden sieht man, dass das erste Glied die Vectorkraft ist, die herrührt von einer gleichförmigen Normalmagnetisation dieser Fläche.

485.) Da $$\nabla U\varrho = -\frac{2}{T\varrho}$$

ist, so erhalten wir

$$-2\iiint\frac{ds}{T\varrho} = \iint S.U\varrho\,Uv\,ds.$$

Man erhält durch Differentiation, oder indem man an Stelle von ϱ setzt $\varrho+\alpha$, und nach steigenden Potenzen von $T\alpha$ entwickelt (wobei vorausgesetzt wird, dass der Anfangspunkt ausserhalb des Raumes liegt, über welchen integrirt wird, d. h. dass $T\varrho$ nicht verschwindet),

$$-2\iiint\frac{ds\,U\varrho}{T\varrho^2} = \iint\frac{V.U\varrho\,V.Uv\,U\varrho}{T\varrho}\,ds = 2\iint\frac{Uv\,ds}{T\varrho};$$

dies bedingt wieder

$$\iint\frac{Uv\,ds}{\varrho} = \iint\frac{U\varrho}{T\varrho}\,S.Uv\,U\varrho\,ds.$$

486.) Die Deutung dieses und noch verwickelterer Ausdrücke ähnlicher Art führt auf merkwürdige Sätze, die sich auf die Attraction und die Potentialtheorie beziehen. So haben wir aus (1) § 481,

$$\iiint\frac{\nabla t}{T\varrho}\,ds - \iiint\frac{t\,U\varrho}{T\varrho^2}\,ds = \iint\frac{t\,Uv}{T\varrho}\,ds;$$

dies gibt die Anziehung einer Masse von der Dichtigkeit t, ausgedrückt durch das Potential einer Raumvertheilung und einer Flächenschicht. Setzen wir

$$\sigma = it_1 + jt_2 + kt_3,$$

so wird dies

$$\iiint\frac{\nabla\sigma\,ds}{T\varrho} - \iiint\frac{U\varrho.\sigma\,ds}{T\varrho^2} = \iint\frac{Uv.\sigma\,ds}{T\varrho}.$$

Setzen wir $\sigma=\varrho$ und nehmen die Scalar, so kommen wir auf eine Formel, die schon oben angeführt wurde; nehmen wir den Vector, so folgt

$$V\iint Uv\,U\varrho\,ds = 0.$$

Man kann die Richtigkeit dieses Ausdruckes nachweisen aus der Formel

$$\int P d\varrho = V \iint U\nu \,.\, \nabla P ds,$$

wenn wir berücksichtigen, dass

$$\nabla T\varrho = U\varrho.$$

Setzen wir in das Fundamentalintegral

$$\sigma = tU\varrho,$$

so haben wir

$$\iiint \frac{S(\varrho\nabla)t}{T\varrho} d\mathbf{s} - 2\iiint \frac{t d\mathbf{s}}{T\varrho} = \iint tS \,.\, U\nu U\varrho ds.$$

487.) Als weitere Anwendung wollen wir kurz die *Druckfunction in einem elastischen festen Körper* betrachten.

In einem beliebigen Punkte eines deformirten Körpers sei λ der Vectordruck, bezogen auf die Einheit der Fläche, senkrecht auf i; μ und ν haben die entsprechende Bedeutung für Ebenen senkrecht auf j und k.

Betrachten wir ein unendlich kleines Tetraeder, so erhalten wir für den Druck auf die Flächeneinheit senkrecht auf den Einheits-Vector ω

$$\lambda Si\omega + \mu Sj\omega + \nu Sk\omega = -\varphi\omega,$$

so dass der Druck auf irgend eine Ebene ausgedrückt wird durch eine *lineare Vectorfunction* der Einheitsnormale der Ebene.

Wir betrachten nun das Gleichgewicht in Bezug auf eine Rotation eines unendlich kleinen Parallelepipedons, dessen Kanten i, j, k parallel sind; nehmen wir an, dass keine Molekularkräftepaare bestehen, so haben wir

$$V(i\lambda + j\mu + k\nu) = 0,$$

oder

$$\Sigma Vi\varphi i = 0,$$

oder

$$V\nabla\varphi\varrho = 0.$$

Dies zeigt (§ 173), dass in diesem Falle φ *selbstconjugirt* ist, d. h. es enthält φ nicht neun, sondern nur sechs verschiedene Constanten.

488.) Betrachten wir jetzt das Gleichgewicht in Bezug auf eine Translation eines beliebigen Theiles des festen Körpers, der einen einfach zusammenhängenden geschlossenen Raum ausfüllt. Es sei u das Potential der äussern Kräfte. Die Bedingung ist dann

$$\iint \varphi(U\nu) ds + \iiint d\mathbf{s}\nabla u = 0,$$

wo ν der Normalvector des Flächenelementes ds ist. Das Doppelintegral erstreckt sich hier über die ganze Begrenzungsfläche und das dreifache Integral über den ganzen geschlossenen Raum.

Um dies auf eine Form zu bringen, bei der die Methode des § 467 unmittelbar anwendbar ist, operire man mit $S.\alpha$, wo α ein beliebiger constanter Vector ist. Wir erhalten

$$\iint S.\varphi\alpha U\nu ds + \iiint ds\, S\alpha\nabla u = 0,$$

indem wir berücksichtigen, dass φ selbstconjugirt ist.

Dies kann man schreiben

$$\iiint ds(S.\nabla\varphi\alpha + S.\alpha\nabla u) = 0$$

und da die Grenzen der Integration beliebig sind

$$S.\nabla\varphi\alpha + S.\alpha\nabla u = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Dies ist die gesuchte Gleichung. Die Unbestimmtheit von α macht dieselbe äquivalent mit drei Scalargleichungen.

Man kann dies auf verschiedene Weisen, ohne das α, ausdrücken. Wählen wir das Zeichen $\triangle$ an Stelle von ∇, wenn wir die Glieder von φ betrachten, so kann man schreiben

$$\nabla u = -S\nabla\triangle.\varphi\varrho.$$

Integriren wir dies über einen gegebenen Raum, so müssen wir bedenken, dass ∇ und ϱ nur Constructionszeichen sind und in dem Integral nicht als variabel betrachtet werden.

489.) Um die Richtigkeit hiervon nachzuweisen, kann man zeigen, dass man aus dieser Gleichung die Gleichgewichtsbedingungen erhalten kann in Bezug auf eine Rotation eines einfach zusammenhängenden Theiles des Körpers; diese Bedingungsgleichungen kann man unmittelbar hinschreiben wie folgt:

$$\iint V.\varrho\varphi(U\nu)ds + \iiint V.\varrho\nabla u ds = 0.$$

Um dies nachzuweisen, hat man aus (1)

$$S.\nabla\varphi\sigma + S.\sigma\nabla u = 0,$$

wenn und nur wenn σ der Bedingung genügt

$$S.\varphi(\nabla)\sigma = 0.$$

Dieser Bedingung wird genügt, wenn

$$\sigma = V\alpha\varrho,$$

wo α ein beliebiger constanter Vector ist. Denn

$$S.\varphi(\nabla)V\alpha\varrho = -S.\alpha V\varphi(\nabla)\varrho$$
$$= S.\alpha V\nabla\varphi\varrho = 0.$$

Hieraus $\iiint ds(S.\nabla\varphi V\alpha\varrho + S.\alpha\varrho\nabla u) = 0,$

oder $\iint ds S.\alpha\varrho\varphi U\nu + \iiint ds S.\alpha\varrho\nabla u = 0.$

Multiplicirt man mit α und addirt die Ausdrücke, die man erhält, indem man nacheinander an Stelle von α je einen von drei rechtwinkligen Vectoren setzt, so erhält man die gesuchte Gleichung.

490.) Es sei σ die Verschiebung des Punktes, der sich ursprünglich in ϱ befand; dann ist die Arbeit, die geleistet wird durch die Deformation eines einfach zusammenhängenden Theiles des Körpers,

$$W = \iint S.\varphi(U\nu)\sigma ds,$$

denn $\varphi(Uv)$ ist die Vectorkraft, die für jede Flächeneinheit des Elementes ds überwunden wurde. Dies lässt sich verwandeln in

$$W = \iiint S.\nabla\varphi\sigma ds.$$

491.) In diesem Falle ist die Deformationsfunction

$$\chi(\omega) = \omega - S.(\omega\nabla)\sigma.$$

Ist die Deformation einfach eine Drehung, in welchem Falle

$$S.\chi\omega\chi\tau - S.\omega\tau = 0,$$

welches auch die Vectoren ω und τ seien, so wird keine Arbeit durch den Druck geleistet.

Unter diesen Bedingungen muss der Ausdruck verschwinden, der die Arbeit gibt, die durch den Druck geleistet wird.

Ist die Deformation unendlich klein, so ist die geleistete Arbeit eine homogene Function zweiten Grades dieser entscheidenden Grössen; denn wird Arbeit geleistet, so muss dieselbe positiv sein. Selbst wenn die Arbeit eine endliche Grösse erreicht, so kann man die Arbeit, die das Einheitsvolumen leistet, ausdrücken durch

$$w = \Sigma.(S.\chi\varepsilon\chi\varepsilon' - S\varepsilon\varepsilon')(S.\chi\eta\chi\eta' - S\eta\eta'),$$

wo ε, ε', η, η', die im allgemeinen Functionen von σ sind, zu constanten Vectoren werden, wenn der Druck unendlich klein ist. Ist dies der Fall, so kann man leicht nachweisen, dass, welches auch die Zahl der Glieder unter Σ sei, w nur 21 verschiedene, von einander unabhängige Constanten enthält; nämlich die Coefficienten der homogenen Producte zweiter Ordnung der sechs Werthe der Form

$$S.\chi\omega\chi\tau - S\omega\tau$$

für die Werthe i, j, k von ω und τ.

Nehmen wir an, die Deformation sei unendlich klein, so haben wir für die Variation von w den Ausdruck

$$\delta w = \Sigma(S.\delta\chi\varepsilon\chi\varepsilon' + S.\delta\chi\varepsilon'\chi\varepsilon)(S.\chi\eta\chi\eta' - S\eta\eta') + \Sigma(S.\chi\varepsilon\chi\varepsilon' - S\varepsilon\varepsilon')(S.\delta\chi\eta\chi\eta' + S.\delta\chi\eta'\chi\eta).$$

Aus der ersten Gleichung haben wir

$$\delta\chi\omega = -S(\omega\nabla)\delta\sigma.$$

Schreiben wir das Ergebniss nur für einen Factor, so ist die Variation der Gesammtarbeit, die geleistet wird, wenn man eine Masse einer Deformation unterwirft,

$$\delta W = \delta\iiint w ds = \iiint \delta w ds$$

$$= -\Sigma\iiint ds(S.\chi\eta\chi\eta' - S\eta\eta')\{S.\chi\varepsilon' S.(\varepsilon\nabla)\delta\sigma + S.\chi\varepsilon S(\varepsilon'\nabla)\delta\sigma\}.$$

Haben wir an der Grenze

$$\delta\sigma = 0,$$

d. h. wird die Oberfläche der Masse in einer *bestimmten* Weise verändert, so haben wir

$$\iiint d\mathbf{s} S . \omega S(\varepsilon \nabla) \delta\sigma = - \iiint d\mathbf{s} S . \delta\sigma S(\varepsilon \nabla) \omega .$$

Hieraus

$$\delta W = \Sigma \iiint d\mathbf{s} S . d\sigma [S(\varepsilon \nabla) \{\chi \varepsilon' (S . \chi\eta\chi\eta' - S\eta\eta')\} + S(\varepsilon' \nabla) \{\chi\varepsilon (S . \chi\eta\chi\eta' - S\eta\eta')\}] .$$

Eine willkürliche Aenderung in σ wird im allgemeinen die geleistete Arbeit *vergrössern*, wir haben dann

$$0 = \Sigma [S(\varepsilon \nabla) \{\chi \varepsilon' (S . \chi\eta\chi\eta' - S\eta\eta')\} + S(\varepsilon' \nabla) \{\chi\varepsilon (S . \chi\eta\chi\eta' - S\eta\eta')\}];$$

es ist dies die Gleichung zur Bestimmung von σ; denn die Constanten ε, ε', η, η' hängen nur ab von den elastischen Eigenschaften der deformirten Substanz und können deshalb als bekannt angesehen werden, während σ ein wesentlicher Theil von χ ist.

492.) Da der algebraische Operator

$$\varepsilon^{h \frac{d}{dx}},$$

auf eine Function von x angewandt, x in $x + h$ verwandelt, so folgt, dass, wenn σ ein Vector ist, der nicht verändert wird durch

$$\nabla = i \frac{d}{dx} + j \frac{d}{dy} + k \frac{d}{dz},$$

wir erhalten $$\varepsilon^{-S\sigma\nabla} f(\varrho) = f(\varrho + \sigma)$$

für jede beliebige Function f. Hieraus können wir den Taylor'schen Satz in einer wichtigen Quaternionenform ableiten.

Verhält sich $\triangle$ zu den Bestandtheilen von σ wie ∇ sich zu denjenigen von ϱ verhält, und sind f und F zwei beliebige Functionen, die dem commutativen Gesetz der Multiplication unterworfen sind, so nimmt dieser Satz die merkwürdige Form an:

$$\varepsilon^{-S\triangle\nabla} f(\varrho) T(\sigma) = f(\varrho + \triangle) F(\sigma) = F(\sigma + \nabla) f(\varrho);$$

ein specieller Fall hiervon ist

$$\varepsilon^{\frac{d^2}{dx\,dy}} f(x) F(y) = f\left(x + \frac{d}{dy}\right) F(y) = F\left(y + \frac{d}{dx}\right) f(x) .$$

Man sieht leicht, welche Aenderungen eintreten, wenn f und F nicht commutativ sind.

Ist eine dieser Functionen eine inverse Function, wie dies vorkommen kann in der Lösung einer linearen Differentialgleichung, so geben diese Sätze nicht den willkürlichen Theil des Integrals, aber sie erleichtern sehr oft die Ermittelung des anderen Theiles.

Man kann leicht andere Sätze ableiten, die Operatoren enthalten, wie $\varepsilon^{S\varrho\nabla}$, $\varepsilon^{S.\alpha\varrho\nabla}$, u. s. w. und sich zu zahlreichen Anwendungen eignen.

493.) Man kömmt aber auf Ergebnisse, die im ersten Augenblick überraschen wegen der ausserordentlichen Freiheit, mit der man Symbole trennen kann. Wir führen einen derartigen Fall an, um die Natur desselben klar zu machen.

Es sei P eine Scalarfunction von ϱ. Man soll den Unterschied angeben zwischen P in ϱ und dessen *mittlern* Werthe in einer sehr kleinen Kugel, deren Radius r und deren Volumen v ist, und deren Mittelpunkt in ϱ liegt.

Aus dem vorhergehenden sehen wir, dass wir dafür folgenden Ausdruck erhalten:

$$\frac{1}{v}\iiint(\varepsilon^{-S\sigma\nabla}-1)Pd\mathbf{s},$$

wo σ der Vector ist, der den Mittelpunkt der Kugel verbindet mit dem Volumelement $d\mathbf{s}$; die Integration, welche sich allein auf σ und $d\mathbf{s}$ bezieht, erstreckt sich über das Volumen der Kugel. Entwickeln wir die Exponentialgrösse, so können wir schreiben:

$$-\frac{1}{v}\iiint(S\sigma\nabla-\tfrac{1}{2}(S\sigma\nabla)^2+\ldots)Pd\mathbf{s}$$

$$=-\frac{1}{v}S.\nabla P\iiint\sigma d\mathbf{s}+\frac{1}{2v}\iiint(S\sigma\nabla)^2Pd\mathbf{s}-\text{u. s. w.}$$

Die höhern Glieder kann man weglassen wegen der Kleinheit von r, die Grenze vön $T\sigma$.

Aus der Symmetrie sieht man, dass

$$\iiint\sigma d\mathbf{s}=0.$$

Welcher constanter Vector auch α sei, so hat man

$$\iiint(S\alpha\sigma)^2d\mathbf{s}=-\alpha^2\iiint(S\sigma U\alpha)^2d\mathbf{s}.$$

Da sich die Integration über eine Kugel erstreckt, so sieht man, dass das Integral zur rechten gleich ist der Hälfte einer Grösse, die wir nennen können das Trägheitsmoment des Volumens um ein Diameter. Hieraus

$$\iiint(S\sigma U\alpha)^2d\mathbf{s}=\frac{vr^2}{5}.$$

Setzen wir jetzt ∇ an Stelle von α, so haben wir aus frühern Resultaten, und indem wir höhere Potenzen von r vernachlässigen, *da sich die Integration nicht auf* ∇ *bezieht,*

$$\frac{1}{v}\iiint(\varepsilon^{-S\sigma\nabla}-1)Pd\mathbf{s}=-\frac{r^2}{10}\nabla^2P,$$

der Ausdruck, den Maxwell gegeben hat.*

Obwohl wir der Einfachheit wegen angenommen haben, P sei

---

* *London Math. Soc. Proc.* Vol. III. nr. 34, 1871.

eine Scalar, so können wir doch in dem obigen Ausdrucke P als Quaternion betrachten.

494.) Ist ϱ der Vector des Elementes ds, wo die Oberflächendichte $f\varrho$ ist, so ist das Potential in σ:

$$\iint ds f\varrho FT(\varrho - \sigma);$$

F ist die Potentialfunction, die eine beliebige Form haben kann. Nach dem Verfahren des § 492 kann man dies umformen in

$$\iint ds f\varrho \varepsilon^{S\sigma\nabla} FT\varrho,$$

oder in $$\iint ds f\varrho \varepsilon^{S\varrho\Delta} FT\sigma,$$

was für die Integration bequemer ist. Δ hängt von den Bestandtheilen von σ ab in derselben Weise, wie ∇ von denjenigen von ϱ.

Man kann dies noch weiter vereinfachen, indem man einen Vector σ_0 einführt, der schliesslich zu Null wird, gleichzeitig mit dem entsprechenden Operator Δ_0. Obiger Ausdruck wird dann

$$\iint ds \varepsilon^{S\varrho(\Delta-\Delta_0)} f\sigma_0 FT\sigma,$$

wo ϱ in einer Form erscheint, die leichter zu behandeln ist.

Bis jetzt ist die Formel anwendbar auf eine beliebige Vertheilung. Wir beschränken uns jetzt auf eine Oberflächenschicht.

495.) Eine Integration der letzten Form kann immer leicht geführt werden im Falle einer Rotationsfläche; der Anfangspunkt liegt in der Achse. Denn was die Integration betrifft, so kann der der Ausdruck auf das einfache Integral gebracht werden

$$\int_p^q dx \varphi \dot{x} \varepsilon^{\alpha x},$$

wo φ eine beliebige Scalarfunction ist und x abhängt von dem Cosinus der Neigung von ϱ zur Achse. Es ist

$$\int_p^q dx \varphi x \varepsilon^{ax} = \varphi\left(\frac{d}{da}\right) \frac{\varepsilon^{qa} - \varepsilon^{pa}}{a}.$$

Da die Deutung des allgemeinen Ausdrucks nicht ohne Schwierigkeit ist, so wollen wir den Fall einer Hohlkugel wählen; der Anfangspunkt liege im Mittelpunkte derselben, die Dichte sei Eins. Dieser einfache Fall illustrirt zur Genüge die Art, diese Aufgaben zu behandeln.

Wir sehen, dass in jenem einfachen Fall, wenn α ein beliebiger constanter Vector ist, und a der Halbmesser der Kugel:

$$\iint ds \varepsilon^{S\alpha\varrho} = 2\pi a \int_{-a}^{+a} \varepsilon^{xTa} dx = \frac{2\pi a}{T\alpha}(\varepsilon^{aT\alpha} - \varepsilon^{-aT\alpha}).$$

Wir können nun Δ behandeln, wie wir eben α behandelt haben.

Wir haben nun die Wirkung zu untersuchen, die Operatoren wie $T\Delta$, $\varepsilon^{aT\Delta}$ u. s. w. ausüben, denn diese Operationen werden

zum ersten Male mit Scalarfunctionen von $T\sigma$ vorgenommen; wir bezeichnen dieselben mit $\mathfrak{T}$. Nun ist

$$(T\triangle)^2 F = -\triangle^2 F = F'' + \frac{2F'}{\mathfrak{T}};$$

hieraus findet man leicht eine Form von $T\triangle$. Um sich zu überzeugen, dass dies die einzige ist, setze man

$$T\triangle = \varphi \frac{d}{d\mathfrak{T}} + \psi,$$

wo φ und ψ zu bestimmende Scalarfunctionen von $\mathfrak{T}$ sind. Dies liefert

$$(T\triangle)^2 F = \left(\varphi \frac{d}{d\mathfrak{T}} + \psi\right)(\varphi F' - \psi F)$$
$$= \varphi^2 F'' + (\varphi\varphi' + \psi\varphi + \varphi\psi) F' + (\varphi\psi' + \psi^2) F.$$

Vergleicht man, so folgt

$$\varphi^2 = 1,$$
$$\varphi\varphi' + \psi\varphi + \varphi\psi = \frac{2}{\mathfrak{T}},$$
$$\varphi\psi' + \psi^2 = 0.$$

Aus der ersten $\qquad \varphi = \pm 1;$

setzt man dies in die zweite, so erhält man

$$\psi = \pm \frac{1}{\mathfrak{T}},$$

φ und ψ haben dasselbe Vorzeichen. Die dritte Gleichung wird identisch erfüllt.

Wir haben also $\qquad \pm T\triangle = \frac{d}{d\mathfrak{T}} + \frac{1}{\mathfrak{T}}.$

Eine leichte Ueberlegung zeigt, dass

$$\pm (T\triangle)^n = \left(\frac{d}{d\mathfrak{T}}\right)^n + \frac{n}{\mathfrak{T}}\left(\frac{d}{d\mathfrak{T}}\right)^{n-1}.$$

Hieraus folgt unmittelbar

$$\varepsilon^{a\,T\triangle} = 1 \pm a\left(\frac{d}{d\mathfrak{T}} + \frac{1}{\mathfrak{T}}\right) + \cdots \pm \frac{a^n}{1.2\ldots n}\left[\left(\frac{d}{d\mathfrak{T}}\right)^n + \frac{n}{\mathfrak{T}}\left(\frac{d}{d\mathfrak{T}}\right)^{n-1}\right] + \ldots.$$
$$= \varepsilon^{\pm a \frac{d}{d\mathfrak{T}}} \pm \frac{a}{\mathfrak{T}}\, \varepsilon^{\pm a \frac{d}{d\mathfrak{T}}}.$$

Mit Hilfe dieses Ausdrucks gelangt man zu den bekannten Formeln. Wir überlassen dies dem Leser.*

496.) Als elementares Beispiel der Anwendung von ∇ in der Variationsrechnung wollen wir den Ausdruck betrachten

$$A = \int Q T d\varrho,$$

wo $Td\varrho$ ein Element eines endlichen Bogens ist, über den sich die

* Proc. R. S. E. 1871—72.

Integration erstreckt, und Q ist im Allgemeinen eine Scalarfunction von ϱ und Constanten.

Wir erhalten

$$\begin{aligned}\delta A &= \int(\delta Q\, T d\varrho + Q\delta T d\varrho)\\ &= \int(\delta Q\, T d\varrho - QS.Ud\varrho d\delta\varrho)\\ &= -[QSUd\varrho\delta\varrho] + \int(\delta Q\, T d\varrho + S.\delta\varrho d(QUd\varrho));\end{aligned}$$

das Glied in den eckigen Klammern bezieht sich allein auf die Grenzen und gibt die Grenzbedingungen. Das andere Glied kann auf die Form gebracht werden

$$S\int\delta\varrho(d(QUd\varrho) - \nabla Q.Td\varrho).$$

Soll die Curve durch die Bedingung bestimmt werden, dass die Variation von A verschwinde, so muss, da $\delta\varrho$ eine beliebige Richtung haben kann,

$$d(QUd\varrho) - \nabla Q.Td\varrho = 0,$$

oder in der Bezeichnungsweise des Kapitel IX:

$$\frac{d}{ds}(Q\varrho') - \nabla Q = 0.$$

Diese einfache Gleichung zeigt, dass

1. die Osculationsebene der gesuchten Curve den Vector ∇Q enthält;

2. die Krümmung in einem beliebigen Punkte ist Q umgekehrt proportional, und direkt proportional der Componente von ∇Q in Richtung der absoluten Krümmung.

497.) Als erste Anwendung wählen wir den Fall, wo A die *Wirkung* eines Theilchens bedeutet, das sich frei bewegt unter einem System von Kräften, die ein Potential haben, so dass

$$Q = T\dot\varrho$$

und

$$\dot\varrho^2 = 2(P - H),$$

wo P das Potential ist, H die Constante der Energie.

Dies liefert $\quad T\dot\varrho\nabla T\dot\varrho = Q\nabla Q = -\nabla P,$

und

$$Q\varrho' = \dot\varrho,$$

so dass die obige Gleichung wird

$$\ddot\varrho + \nabla P = 0,$$

und dies ist unmittelbar ersichtlich.

498.) Sehen wir nun auf die obere Genze, so wird der erste Ausdruck für δA in dem gegenwärtigen Falle

$$-[T\dot\varrho SUd\varrho\delta\varrho] = -S\dot\varrho\delta\varrho.$$

Nehmen wir eine Variation der Constanten H an, so erhalten wir folgendes Glied von dem unintegrirten Theile:

$$t\delta H.$$

Wir erhalten so unmittelbar Hamilton's Gleichung der *variirenden Wirkung* in den Formen

$$\nabla A = \dot{\varrho}$$

und

$$\frac{dA}{dH} = t.$$

Die erste dieser Gleichungen liefert unter Berücksichtigung der obigen Bedingungen

$$(\nabla A)^2 = 2(P - H),$$

die bekannte Differentialgleichung erster Ordnung und zweiten Grades.

499.) Ist A eine beliebige Lösung dieser Gleichung, so soll man nachweisen, dass der Vector ∇A die Geschwindigkeit in einer freien Bahn darstellt, die beschrieben werden kann unter der Wirkung des gegebenen Systems von Kräften. Wir haben

$$\frac{d}{dt}\dot{\varrho} = \ddot{\varrho} = -\nabla P = -\tfrac{1}{2}\nabla(\nabla A)^2$$
$$= -S(\nabla A.\nabla)\nabla A.$$

Nun ist

$$\frac{d}{dt}\cdot\nabla A = -S(\dot{\varrho}\nabla)\nabla A.$$

Man sieht leicht, dass die Gleichung

$$\nabla A = \dot{\varrho}$$

bestehen kann neben jeder dieser Vectorgleichungen.

500.) Bezieht sich δ allein auf die Constanten, so erhält man aus der Differentialgleichung

$$\tfrac{1}{2}\delta(\nabla A)^2 = S.\nabla A\delta\nabla A = -\delta H.$$

Wir haben aber auch

$$\frac{\delta A}{\delta H} = t;$$

dies liefert

$$\frac{d}{dt}(\delta A) = -S(\dot{\varrho}\nabla)\delta A = \delta H.$$

Diese beiden Gleichungen für δH geben übereinstimmend

$$\nabla A = \dot{\varrho},$$

und liefern den Beweis, dass die Differentialquotienten von A in Bezug auf die zwei Integrationsconstanten constant sind.

Wir erhalten somit die Gleichungen zweier Flächen, deren Schnitt die Bahn liefert.

501.) Nehmen wir nun an, A sei die *Zeit*, in welcher die Bahn durchlaufen wird, es werde also die Brachistochrone gesucht. Hier haben wir

$$Q = \frac{1}{T\dot{\varrho}};$$

die andere Bedingung ist dieselbe wie in § 497, und wir haben

$$\frac{d}{dt}\,\dot{\varrho}^{-1} - \dot{\varrho}^{-2}\nabla P = 0,$$

welches auf die symmetrische Form gebracht werden kann:

$$\ddot{\varrho} + \dot{\varrho}^{-1}\nabla P\dot{\varrho} = 0.$$

Es ist sehr lehrreich, diese Gleichung zu vergleichen mit derjenigen der freien Bahn oben (§ 497).

Hamilton's Methode kann leicht angewendet werden wie in dem vorigen Beispiele. (Tait, Trans. R. S. E. 1865.)

502.) Als speciellen Fall wollen wir annehmen, die Schwere sei die einzige Kraft. Dann ist

$$\nabla P = \alpha,$$

ein constanter Vector, so dass

$$\frac{d}{dt}\,\dot{\varrho}^{-1} - \dot{\varrho}^{-2}\alpha = 0.$$

Die Form dieser Gleichung legt es nahe, die Annahme zu machen

$$\dot{\varrho}^{-1} = \beta - p\alpha\tan qt,$$

wo p und q Scalaren sind, und

$$S\alpha\beta = 0.$$

Substituirt man, so folgt

$$-pq\sec^2 qt + (-\beta^2 - p^2\alpha^2\tan^2 qt) = 0.$$

Dies liefert $$pq = T^2\beta = p^2T^2\alpha.$$

Nun sei $$p\beta^{-1}\alpha = \gamma;$$

dies muss ein Einheits-Vector sein, senkrecht auf α und β, so dass

$$\dot{\varrho}^{-1} = \frac{\beta}{\cos qt}(\cos qt - \gamma\sin qt),$$

und hieraus $$\dot{\varrho} = \cos qt(\cos qt + \gamma\sin qt)\beta^{-1}.$$

(Man kann dies durch Ausmultipliciren nachweisen.)

Wählen wir den Anfangspunkt so, dass die Integrationsconstante verschwindet, so haben wir

$$2\varrho\beta = t + \frac{1}{2q}(\sin 2qt - \gamma\cos 2qt),$$

und dies ist die Gleichung einer Cykloide. Diese Gleichung enthält auch das Gesetz, nach welchem die Bahn beschrieben wird.

Die Tangente am Scheitel ist β parallel und die Symmetrieachse ist α parallel.

503.) Wir betrachten den Fall einer Kette, die unter dem Einflusse gegebener Kräfte steht. Hier ist

$$Q = Pr,$$

wo P das Potential ist, r die Masse der Einheit der Länge. Hier haben wir ebenfalls

$$\int T d\varrho = l,$$

da die Länge der Kette gegeben ist.

Man sieht leicht, dass dies nach den gewöhnlichen Methoden auf die Gleichung führt

$$\frac{d}{ds}\{(Pr + u)\varrho'\} - r\nabla P = 0,$$

wo u eine Scalar ist.

504.) Wir betrachten den einfachen Fall, wo die Kette gleichförmig ist. Wir können dann r mit u zusammenfassen. Weiter sei die Schwere die einzige wirkende Kraft. Dann ist

$$P = S\alpha\varrho, \qquad \nabla P = -\alpha,$$

und

$$\frac{d}{ds}\{(S\alpha\varrho + u)\varrho'\} + \alpha = 0.$$

Differentiirt man und operirt mit $S.\varrho'$, so folgt

$$S.\varrho'\left\{\varrho'\left(S\alpha\varrho' + \frac{du}{ds}\right) + \alpha\right\} = 0 = -\frac{du}{ds};$$

hieraus folgt, dass u constant ist.

Die Curve liegt in einer Ebene, die α parallel ist, und ihre Gleichung kann geschrieben werden

$$(S\alpha\varrho)^2 + \alpha^2 s^2 = \text{const.},$$

eine bekannte Gleichung der Kettenlinie.

Wenn das Q des § 296 eine Quaternion oder ein Vector ist, so haben wir einfach eine Gleichung wie die dort gegebenen für jeden Theil derselben.

505.) P und die Bestandtheile von σ seien Functionen, die an der Grenzfläche des einfach zusammenhängenden Raumes Σ verschwinden, oder die Functionen seien der Art, dass entweder P oder die Bestandtheile von σ dort verschwinden, und die nicht verschwindenden Functionen sollen nicht unendlich werden.

Nach § 467 ist dann

$$\iiint d\mathbf{s}\, S.\nabla(P\sigma) = \iint ds\, PS\sigma Uv = 0,$$

wenn die Integrale über den Raum und über die Oberfläche von Σ genommen werden.

Also

$$\iiint d\mathbf{s} S.\sigma\nabla P = -\iiint d\mathbf{s} PS.\nabla\sigma.$$

Mit Hilfe dieses Satzes können wir leicht einen merkwürdigen Satz von Thomson beweisen. (*Cam. and Dub. Math. Journal*, Jan. 1848, oder *Reprint of Papers on Electrostatics* § 206.)

Nachzuweisen, dass es eine und nur eine Lösung der Gleichung

$$S.\nabla(e^2\nabla u) = 4\pi r$$

gibt, wenn r im Unendlichen verschwindet und e eine beliebige reelle Scalar ist, stetig oder discontinuirlich.

Es sei v das Potential einer Vertheilung von der Dichte r, so dass

$$\nabla^2 v = 4\pi r .$$

Man betrachte nun das Integral

$$Q = -\iiint ds \left(e\nabla u - \frac{1}{e}\nabla v\right)^2 .$$

Soll Q ein Minimum sein als Function von u (was möglich ist, da es nicht negativ sein kann, und jeden positiven Werth annehmen kann, grösser als dies Minimum), so muss

$$\begin{aligned} 0 = \tfrac{1}{2}\delta Q &= -\iiint ds\, S.(e^2\nabla u - \nabla v)\nabla \delta u \\ &= \iiint ds\, \delta u S.\nabla(e^2\nabla u - \nabla v), \end{aligned}$$

nach dem obigen Lemma,

$$= \iiint ds\, \delta u \{S.\nabla(e^2\nabla u) - 4\pi r\}.$$

Jeder Werth von u, der der gegebenen Gleichung genügt, macht also Q zum Minimum. Doch gibt es nur einen Werth von u, der Q zum Minimum macht. Denn sei Q_1 der Werth von Q, wenn

$$u_1 = u + \varphi$$

an Stelle von u gesetzt wird, so erhalten wir

$$\begin{aligned} Q_1 &= -\iiint ds \left(e\nabla(u+\varphi) - \frac{1}{e}\nabla v\right)^2 \\ &= Q - 2\iiint ds\, S(e^2\nabla u - \nabla v)\nabla\varphi - \iiint ds\, e^2(\nabla\varphi)^2. \end{aligned}$$

Das mittlere Glied dieses Ausdrucks kann nach dem Satz am Anfang dieses Paragraphen geschrieben werden

$$2\iiint ds\, \varphi\{S.\nabla(e^2\nabla u) - 4\pi r\},$$

und verschwindet also. Das letzte Glied ist wesentlich positiv. Ist also u_1 von u verschieden (abgesehen von einer Constanten), so kann es nicht Q zum Minimum machen, und u ist deshalb eine einzige Lösung.

Vermischte Beispiele.

1. Der Ausdruck

$$V\alpha\beta V\gamma\delta + V\alpha\gamma V\delta\beta + V\alpha\delta V\beta\gamma$$

bezeichnet einen Vector. Welchen Vector?

2. Schneiden sich zwei Flächen in einer gemeinschaftlichen Krümmungslinie, so schneiden sie sich unter constantem Winkel.

3. Mit Hilfe der Quaternionenformeln für Rotationen gebe man unter einer neuen Form die Lösung (§ 234) der Aufgabe, in eine

Kugel ein geschlossenes Polygon einzuschreiben, wenn die Richtungen der Seiten gegeben sind.

4. Man drücke durch die Masse und geocentrische Vectoren der Sonne und des Mondes aus, die Vectorkraft der Störung der Sonne auf den Mond, und entwickele den Ausdruck bis zu Gliedern zweiten Grades; man gebe die Grösse und Richtung der einzelnen Componenten. (Hamilton, Lectures p. 615.)

5. Ist $q = r^{\frac{1}{2}}$, so zeige man, dass

$$\begin{aligned}
2dq &= 2dr^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}(dr + Kqdrq^{-1})Sq^{-1} = \tfrac{1}{2}(dr + q^{-1}drKq)Sq^{-1} \\
&= (drq + Kqdr)q^{-1}(q + Kq)^{-1} = (drq + Kqdr)(r + Tr)^{-1} \\
&= \frac{dr + Uq^{-1}drUq^{-1}}{Tq(Uq + Uq^{-1})} = \frac{drUq + Uq^{-1}dr}{q(Uq + Uq^{-1})} = \frac{q^{-1}(Uqdr + drUq^{-1}}{Uq + Uq^{-1}} \\
&= \frac{q^{-1}(qdr + Trdrq^{-1})}{Tq(Uq + Uq^{-1})} = \frac{drUq + Uq^{-1}dr}{Tq(1 + Ur)} = \frac{drKq^{-1} + q^{-1}dr}{1 + Ur} \\
&= \left\{dr + V.Vdr\,\frac{V}{S}q\right\}q^{-1} = \left\{d\varrho - V.Vdr\frac{V}{S}dr\frac{V}{S}q^{-1}\right\}q^{-1} \\
&= \frac{dr}{q} + V.V\frac{dr}{q}\frac{V}{S}q = \frac{dr}{q} - V.V\frac{dr}{q}\frac{V}{S}q^{-1} \\
&= drq^{-1} + V.Vq^{-1}Vdr\left(1 + \frac{V}{S}q^{-1}\right);
\end{aligned}$$

man gebe geometrische Deutungen dieser verschiedenen Ausdrücke für dieselbe Grösse? (Ibid. p. 628.)

6. Man zeige, dass die Bewegungsgleichung eines homogenen festen Rotationskörpers um einen Punkt seiner Achse, der nicht der Schwerpunkt ist, ist

$$BV\varrho\ddot{\varrho} - A\Omega\dot{\varrho} = V\varrho\gamma,$$

wo Ω eine Constante ist. (Trans. R. S. E., 1869.)

7. Man integrire die Differentialgleichungen

(a) $\frac{dq}{dt} + aq = b;$

(b) $\frac{d\varrho}{dt} + \varphi\varrho = \alpha,$

(c) $\frac{d^2\varrho}{dt^2} + \varphi\left(\frac{d\varrho}{dt}\right) + \psi\varrho = 0,$

wo a und b gegebene Quaternionen sind und φ und ψ gegebene lineare Vectorfunctionen.

8. Man leite (4) des § 92 direkt ab aus (3) des § 91.

9. Die Werthe des Kettenbruches

$$u_x = \left(\frac{j}{i+}\right)^x 0$$

zu ermitteln, wenn i und j ihre Quaternionenbedeutung haben und x die Werthe 1, 2, 3 u. s. w. hat. (Hamilton, Lectures p. 645.)

10. Wenn $$u_x = \left(\frac{j}{i+}\right)^x c\,,$$

wo c eine gegebene Quaternion ist, die verschiedenen Werthe zu ermitteln.

Für welchen Werth von c wird u constant? (Ibid. p. 652.)

11. Nachzuweisen, dass das Moment des hydrostatischen Druckes auf die Seiten eines Polyeders gleich Null ist, (a) wenn der Druck der Flüssigkeit überall der gleiche ist, (b) wenn der Druck von einem Kräftesystem herrührt, das ein Potential hat.

12. Welcher Vector wird durch zwei bekannte Vectoren gegeben durch den Ausdruck

$$\varrho^{-1} = \tfrac{1}{2}(\alpha^{-1} + \beta^{-1})\,?$$

Nachzuweisen, dass der Anfangspunkt auf dem Kreise liegt, der durch die Endpunkte jener Vectoren geht.

13. Tait, *Trans. and Proc.* R. S. E. 1870—73. Mit der Bezeichnungsweise der §§ 467, 477 beweise man

(a) $\iiint S(\alpha\nabla)\tau\, d\mathbf{s} = \iint \tau S\alpha U\nu ds.$

(b) Wenn $S(\varrho\nabla)\tau = -n\tau\,,$

$$(n+3)\iiint \tau\, d\mathbf{s} = -\iint \tau S\varrho U\nu ds\,.$$

(c) Mit der weitern Beschränkung

$$\nabla^2\tau = 0\,,$$

$$\iint S.U\nu(2n\varrho + (n+3)\varrho^2\nabla).\tau d\mathbf{s} = 0\,.$$

(d) Den Werth des letzten Integrals, genommen über eine ungeschlossene Fläche, auszudrücken durch ein Integral genommen über eine Curve.

(e) $-\int T d\varrho = \iint ds\, S.U\nu\nabla\sigma,$

wenn $\sigma = U d\varrho$ über die Curve.

(f) Für jeden Theil einer Fläche, deren Begrenzungskante ganz auf einer Kugel liegt, mit dem Anfangspunkte als Mittelpunkt

$$\iint ds S.(U\varrho\, U\nu\nabla).\sigma = 0$$

für jedes σ.

(g) $\int V d\varrho\nabla.\sigma = \iint ds(U\nu\nabla^2 - S(U\nu\nabla)\nabla)\sigma\,,$

für jedes σ.

14. Tait, *Trans.* R. S. E. 1873. Man deute die Gleichung

$$d\sigma = uq\, d\varrho\, q^{-1},$$

und zeige, dass sie zu den folgenden Gleichungen führt:

$$\nabla^2\sigma = q\nabla uq^{-1},$$

$$\nabla.uq^{-1} = 0,$$

$$\nabla^2.u^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Hieraus weise man nach, dass das einzige System von Flächen, die den Raum in Würfel zerlegen, Ebenen sind und deren elektrische Bilder.

15. Welches ist die Aufgabe, deren Bedingungen durch folgende sechs Gleichungen ausgesprochen werden, aus denen ξ, η, ζ bestimmt werden sollen als Scalarfunctionen von x, y, z, oder von

$$\varrho = ix + jy + kz?$$

$$\nabla^2\xi = 0, \qquad \nabla^2\eta = 0, \qquad \nabla^2\zeta = 0,$$

$$S\nabla\xi\nabla\eta = 0, \qquad S\nabla\eta\nabla\zeta = 0, \qquad S\nabla\zeta\nabla\xi = 0,$$

wo $$\nabla = i\frac{d}{dx} + j\frac{d}{dy} + k\frac{d}{dz}.$$

Nachzuweisen, dass weiter hieraus folgt

$$0 = \nabla^2\xi\eta = \nabla^2\eta\zeta = \nabla^2\zeta\xi = \nabla^2\xi\eta\zeta.$$

Nachzuweisen, dass mit einer Verlegung des Anfangspunktes die allgemeine Lösung dieser Gleichungen auf die Form gebracht werden kann

$$S\varrho(\varphi + f)^{-1}\varrho = 1,$$

wo φ eine selbstconjugirte lineare Vectorfunction ist, und ξ, η, ζ bestimmt werden aus drei Werthen von f in einem beliebigen Punkte durch Relationen, ähnlich denjenigen in Beispiel 24 zu Kapitel IX. (Vergl. Lamé, *Journal des Mathématiques*, 1843.)

16. Nachzuweisen, dass, wenn ϱ der Radiusvector eines Planeten ist, das Potential P von Massen ausserhalb des Sonnensystems in die Bewegungsgleichung ein Glied einführt von der Form

$$S(\varrho\nabla)\nabla P.$$

Nachzuweisen, dass dies eine selbstconjugirte lineare Vectorfunction von ϱ ist, und dass nur *fünf* unabhängige Constanten in dieselbe eingehen.

Die ungestörte Bewegung sei kreisförmig; die Hauptveränderungen anzugeben, die diese Störung hervorbringt.

17. In § 405 oben haben wir die Gleichungen

$$V\alpha(\ddot{\varpi} + n\varpi) = 0, \qquad S\alpha\varpi = 0, \qquad \alpha = \omega Vi\alpha, \qquad T\alpha = 1,$$

wo ω^2 vernachlässigt wird.

Man nimmt nun an

$$q = i^{\frac{\omega t}{\pi}}, \qquad \alpha = q\beta q^{-1}, \qquad r = \beta^{\frac{\omega_1 t}{\pi}}, \qquad \varpi = qr\tau r^{-1}q^{-1};$$

nachzuweisen, dass

$$\dot{\beta} = 0, \qquad T\beta = 1, \qquad S\dot{\beta}\tau = 0, \qquad V\beta(\ddot{\tau} + n^2\tau) = 0,$$

vorausgesetzt, dass $\omega Si\alpha - \omega_1 = 0$.

Hieraus leite man das Verhalten des Foucault'schen Pendels ab, ohne die x, y- und ξ, η-Transformationen in jenem Paragraphen.

18. Hamilton, *Bishop Law's Premium Examination* 1862.

(*a*) O, A, B, P seien vier Punkte im Raume, von denen die drei ersten gegeben sind und nicht in einer Geraden liegen; weiter sei $OA = \alpha$, $OB = \beta$, $OP = \varrho$; in der Gleichung

$$F\frac{\varrho}{\alpha} = F\frac{\beta}{\alpha}$$

werde das Operationszeichen F ersetzt durch S, dann ist der geometrische Ort von P eine Ebene. Welche Ebene?

(*b*) In derselben allgemeinen Gleichung setze man V an Stelle von F, der geometrische Ort von P ist eine unbegrenzte Gerade. Welche Gerade?

(*c*) F werde ersetzt durch K, der geometrische Ort von P ist ein Punkt. Welcher Punkt?

(*d*) Setzt man $F = U$, so ist der geometrische Ort eine unbegrenzte Halb-Gerade oder Strahl. Welcher Strahl?

(*e*) Wird F ersetzt durch T, so ist der geometrische Ort eine Kugel. Welche Kugel?

(*f*) Setzt man TV an Stelle von F, so ist der geometrische Ort ein Rotationscylinder. Welcher Cylinder?

(*g*) Wird F zu TVU, so ist der geometrische Ort ein Rotationskegel. Welcher Kegel?

(*h*) Setzt man SU an Stelle von F, so ist der geometrische Ort ein Kegelmantel. Welchen Kegels? und welcher Mantel?

(*i*) Setzt man VU an Stelle von F, so ist der geometrische Ort ein Strahlenpaar. Welches Paar?

19. Hamilton, *Bishop Law's Premium Examination* 1863.

(*a*) Die Gleichung $S\varrho\varrho' + a^2 = 0$

drückt aus, dass ϱ und ϱ' die Vectoren zweier Punkte P und P' sind, die einander conjugirt sind in Bezug auf die Kugel

$$\varrho^2 + a^2 = 0;$$

oder von denen der eine auf der Polarebene des andern liegt.

(*b*) Man beweise durch Quaternionen, dass, wenn die Gerade, die zwei solcher Punkte P und P' verbindet, die Kugel schneidet, diese Gerade durch die Kugel harmonisch getheilt wird.

(*c*) Ist P' ein gegebener äusserer Punkt, so ist der Tangentenkegel, der von diesem Punkte ausgeht,

$$(V\varrho\varrho')^2 = a^2(\varrho - \varrho')^2;$$

der orthogonale Kegel, dessen Spitze im Mittelpunkte der Kugel liegt, ist dann

$$(S\varrho\varrho')^2 + a^2\varrho^2 = 0.$$

(*d*) Man beweise und deute die Gleichung

$$T(n\varrho - \alpha) = T(\varrho - na), \quad \text{wenn} \quad T\varrho = T\alpha.$$

(*e*) Man transformire und deute die Gleichung des Ellipsoids

$$T(\iota\varrho + \varrho\varkappa) = \varkappa^2 - \iota^2.$$

(*f*) Die Gleichung

$$(\varkappa^2 - \iota^2)^2 = (\iota^2 + \varkappa^2)S\varrho\varrho' + 2S\iota\varrho\varkappa\varrho'$$

drückt aus, dass ϱ und ϱ' Werthe von Punkten sind, die einander conjugirt sind in Bezug auf dasselbe Ellipsoid.

(*g*) Die Gleichung des Ellipsoids kann geschrieben werden

$$S\nu\varrho = 1,$$

wenn $\quad (\varkappa^2 - \iota^2)^2\nu = (\iota - \varkappa)^2\varrho + 2\iota S\varkappa\varrho - 2S\varkappa S\iota\varrho.$

(*h*) Die letzte Gleichung liefert auch

$$(\varkappa^2 - \iota^2)\nu = (\iota^2 + \varkappa^2)\varrho + 2V\iota\varrho\varkappa.$$

(*i*) Mit derselben Bedeutung von ν werden die Gleichungen des Ellipsoids und des reciproken Ellipsoids

$$S\nu d\varrho = 0, \qquad S\varrho d\nu = 0.$$

(*j*) Man eliminire ϱ zwischen den vier Scalargleichungen

$$S\alpha\varrho = a, \qquad S\beta\varrho = b, \qquad S\gamma\varrho = c, \qquad S\varepsilon\varrho = e.$$

20. Hamilton, *Bishop Law's Premium Examination* 1864.

(*a*) Es seien A_1B_1, A_2A_2, ... A_nB_n ein gegebenes System von begrenzten Geraden, die $2n$ Punkte seien gegeben; die Vectorsumme derselben sei $AB = A_1B_1 + A_2B_2 + \ldots A_nB_n$ und soll nicht verschwinden. Man kann dann einen Punkt H und eine Scalar h bestimmen, welche der Quaternionengleichung genügen

$$HA_1 . A_1B_1 + \ldots + HA_n . A_nB_n = h . AB;$$

man wähle einen beliebigen Anfangspunkt O und schreibe

$$OH = V\frac{OA_1 . A_1B_1 + \ldots + OA_n . A_nB_n}{A_1B_1 + \ldots + A_nB_n},$$

$$h = S\frac{OA_1 . A_1B_1 + \ldots}{A_1B_1 + \ldots}.$$

(*b*) Für einen beliebigen Punkt C sei

$$Q_C = CA_1 . A_1B_1 + \ldots + CA_n . A_nB_n;$$

denn diese Quaternionensumme kann umgeformt werden wie folgt:

$$Q_C = Q_H + CH . AB + (h + CH) . AB;$$

und deren Tensor ist also

$$TQ_C = (h^2 + \overline{CH}^2)^{\frac{1}{2}} . \overline{AB},$$

wo $\overline{CH}$ und $\overline{AB}$ Längen darstellen.

(*c*) Der kleinste Werth dieses Tensors TQ_C wird erhalten, indem man den Punkt C nach H verlegt. Sagt man nun, eine Quaternion sei ein Minimum, wenn ihr Tensor ein Minimum ist, so können wir schreiben

$$\min Q_C = Q_H = h . \overline{AB},$$

so dass das Minimum von Q_C ein Vector ist.

(*d*) Die Gleichung

$$TQ_C = c = \text{eine beliebige Scalarconstante} > TQ_H$$

drückt aus, dass der geometrische Ort des veränderlichen Punktes C eine Kugelfläche ist, deren Mittelpunkt in dem festen Punkte H liegt, und deren Radius r oder $\overline{CH}$ der Art ist, dass

$$r . \overline{AB} = (TQ_C{}^2 - TQ_H{}^2)^{\frac{1}{2}} = (c^2 - h^2 . \overline{AB}^2)^{\frac{1}{2}};$$

so dass H der gemeinsame Mittelpunkt einer Reihe concentrischer Kugeln, die durch das gegebene System von Geraden bestimmt werden, der Centralpunkt oder der Mittelpunkt des Systems genannt werden kann.

(*e*) Die Gleichung

$$TVQ_C = c_1 = \text{beliebige Scalarconstante} > TQ_H$$

stellt einen geraden Cylinder dar, dessen Radius ist

$$= (c_1{}^2 - h^2 . \overline{AB}^2)^{\frac{1}{2}}$$

dividirt durch $\overline{AB}$ und dessen Rotationsachse die Gerade ist

$$VQ_C = Q_H = h . AB;$$

diese Gerade, als die gemeinsame Achse einer Reihe solcher geraden Cylinder, kann genannt werden die Centralachse des Systems.

(*f*) Die Gleichung

$$SQ_C = C_2 = \text{beliebige Scalarconstante}$$

stellt eine Ebene dar, und alle diese Ebenen sind der Centralebene parallel, deren Gleichung ist

$$SQ_C = 0 .$$

(*g*) Man beweise, dass die Centralachse die Centralebene senkrecht schneidet in dem Centralpunkte des Systems.

(*h*) Sind die n gegebenen Vectoren $A_1 B_1$, . . . $A_n B_n$ parallel, und deshalb proportional n Scalaren b_1 . . . b_n, so ver-

schwinden die Scalar h und der Vector Q_H; der Mittelpunkt H ist dann gegeben durch die Gleichung

$$b_1 . HA_1 + b_2 . HA_2 + \ldots + b_n . HA_n = 0,$$

oder durch den Ausdruck

$$OH = \frac{b_1 . OA_1 + \ldots + b_n . OA_n}{b_1 + \ldots + b_n},$$

wo O wiederum ein beliebiger Anfangspunkt ist.

21. Hamilton, *Bishop Law's Premium Examination* 1860.

(a) Die Normale an dem Endpunkte eines veränderlichen Vectors ϱ, zu der Rotationsfläche sechsten Grades, die dargestellt wird durch die Gleichung

$$(\varrho^2 - \alpha^2)^3 = 27\alpha^2(\varrho - \alpha)^4, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(a)}$$

oder durch das System der beiden Gleichungen

$$\varrho^2 - \alpha^2 = 3t^2\alpha^2, \qquad (\varrho - \alpha)^2 = t^3\alpha^2, \quad \ldots\ldots \text{(a')}$$

und die Tangente im Meridian in jenem Punkte sind parallel den beiden Vectoren

$$\nu = 2(\varrho - \alpha) - t\varrho$$

und $$\tau = 2(1-2t)(\varrho - \alpha) + t^2\varrho;$$

so dass sie die Achse α schneiden in Punkten, deren Vectoren sind

$$\frac{2\alpha}{2-t} \quad \text{und} \quad \frac{2(1-2t)\alpha}{(2-t)^2 - 2}.$$

(b) Liegt $d\varrho$ in derselben Meridianebene wie ϱ, dann ist

$$t(1-t)(4-t)d\varrho = 3\tau dt, \quad \text{und} \quad S\frac{\varrho\, dt}{d\varrho} = \frac{4-t}{3}.$$

(c) Unter denselben Umständen

$$S\frac{d\nu}{d\varrho} = \frac{2}{3}(1-t).$$

(d) Der Vector des Krümmungsmittelpunktes des Meridians am Ende des Vectors ϱ ist deshalb

$$\sigma = \varrho - \nu\left(S\frac{d\nu}{d\varrho}\right)^{-1} = \varrho - \frac{3}{2}\frac{\nu}{1-t} = \frac{6\alpha - (4-t)\varrho}{2(1-t)}.$$

(e) Die Ausdrücke in Beispiel 38 geben

$$\nu^2 = \alpha^2 t^2(1-t^2), \qquad \tau^2 = \alpha^2 t^3(1-t)^2(4-t);$$

hieraus $$(\sigma - \varrho)^2 = \frac{9}{4}\alpha^2 t^2, \quad \text{und} \quad d\varrho^2 = \frac{9\alpha^2 t}{4-t}dt^2;$$

der Krümmungsradius des Meridians ist also

$$R = T(\sigma - \varrho) = \frac{3}{2}tT\alpha;$$

und die Länge eines Elementes des Bogens jener Curve ist

$$ds = T d\varrho = 3 T\alpha \left(\frac{t}{4-t}\right)^{\frac{1}{2}} dt.$$

(*f*) Dieselben Ausdrücke liefern

$$4(V\alpha\varrho)^2 = -\alpha^4 t^3 (1-t)^2 (4-t);$$

die Hilfsscalar ist zwischen zwei Grenzen, 0 und 4, eingeschlossen und wir können setzen $t = 2 \operatorname{vers}\vartheta$, wo ϑ ein reeller Winkel ist, der continuirlich variirt von 0 bis 2π; der obige Ausdruck für das Bogenelement wird deshalb

$$ds = 3 T\alpha \,.\, t d\vartheta,$$

und liefert durch Integration

$$s = 6 T\alpha (\vartheta - \sin\vartheta),$$

wenn der Bogen s gemessen wird von dem Punkte F, für welchen $\varrho = \alpha$ und der allen Meridianen gemeinschaftlich angehört. Der ganze Umfang einer jeden derartigen Curve ist $= 12\pi T\alpha$.

(*g*) Der Werth von σ liefert

$$4(\sigma^2 - \alpha^2) = 3\alpha^2 t(4-t), \qquad 16(V\alpha\sigma)^2 = -\alpha^4 t^3 (4-t)^3;$$

die Rotationsachse α wird gekreuzt von allen Normalen der Fläche (a); die Fläche der Krümmungsmittelpunkte, welche berührt wird durch alle jene Normalen, ist dargestellt durch die Gleichung

$$4(\sigma^2 - \alpha^2)^3 + 27\alpha^2 (V\alpha\sigma)^2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(b)}$$

(*h*) Der Punkt F gehört den beiden Flächen (a) und (b) an, und ist ein singulärer Punkt einer jeden derselben; auf (a) ist er ein dreifacher, auf (b) ein zweifacher Punkt; in diesem Punkte ist weiter ein unendlich spitzer Nabelpunkt in (b), der mit der Achse α zusammenzufallen strebt; die Fläche (a) hat aber in diesem Punkte eine bestimmte Tangentialebene, die auf jener Achse senkrecht steht. Der Punkt, dessen Vector $-\alpha$ ist und den wir F' nennen wollen, ist ein ebensolcher Nabelpunkt auf (b), gehört aber nicht zur Fläche (a).

(*i*) Ausser den *drei* im allgemeinen zusammenfallenden Schnittpunkten der Fläche (a) mit einer *beliebigen* Transversalen, die durch den dreifachen Punkt F' gezogen ist, liegen in *jeder* Richtung β *drei andere reelle Schnittpunkte*, von denen in der That einer mit F zusammenfällt, wenn die Transversale auf der Achse senkrecht steht; die übrigen werden

durch folgende allgemeine Formel gegeben:

$$\varrho = T\alpha \,.\, [U\alpha + \{2SU(\alpha\beta)^{\frac{1}{3}}\}^3 U\beta] \,.$$

(*j*) Der Punkt V, dessen Vector $\varrho = 2\alpha$ ist, ist ein zweifacher Punkt auf (a), in dessen Nähe jene Fläche einen Nabelpunkt hat, der sehr nahe zusammenfällt mit dem Tangentenkegel in jenem Punkte; der Halbwinkel jenes Kegels ist $= \frac{\pi}{6}$.

Hilfsgleichungen:

$$\begin{cases} 2S\varrho(\varrho - \alpha) = \alpha^2 t^2 (3 + t), \\ 2S\alpha(\varrho - \alpha) = \alpha^2 t^2 (3 - t) \,. \end{cases}$$

$$\begin{cases} S\nu\varrho = -\alpha^2 t(1 - t)(1 - 2t), \\ 2S\nu(\varrho - \alpha) = \alpha^2 t^3 (1 - t) \,. \end{cases}$$

$$\begin{cases} S\varrho\tau = \alpha^2 t^2 (1 - t)(4 - t), \\ 2S(\varrho - \alpha)\tau = \alpha^2 t^3 (1 - t)(4 - t) \,. \end{cases}$$

22. Tait, Proc. R. S. E.

(*a*) Man wende die Formel (2) des § 481 an, um den Flächeninhalt einer geschlossenen endlichen Fläche, deren Gleichung ist

$$F = \text{constans},$$

auf die Form zu bringen

$$\iiint \nabla U(\nabla F) ds \,.$$

Man gebe dies Resultat in der Cartesischen Form für das Ellipsoid.

(*b*) Man wende den Operator $\varepsilon^{S\alpha\nabla}$ und die verwandten Formen an, um aus $\frac{1}{T\varrho}$ die verschiedenen Ordnungen von Kugelfunctionen herzuleiten.

(*c*) Man stelle die Gleichung auf für die Wärmeleitung in einem endlichen festen Körper, der sich durch Strahlung abkühlt. Unter Annahme des particulären Integrals

$$v = \varepsilon^{-mt} u$$

bringe man diese Gleichung auf die Form

$$\nabla^2 u - \frac{m}{k} u = 0,$$

mit der Oberflächen-Bedingung

$$S \,.\, U\nu \nabla u - hu = 0 \,.$$

Hieraus ist nachzuweisen, dass, wenn nicht

$$m_1 = m_2,$$

dass dann $$\iiint u_1 u_2 d\mathbf{s} = 0,$$

und hieraus leite man die vollständige Lösung her.

Neuer Verlag von **B. G. Teubner** in Leipzig.

1880.

Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. Drittes Heft. [276 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 6.40.

Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii. E codice Florentino recensuit, latine vertit notisque illustravit I. L. Heiberg. Vol. I. [IV u. 276 S. mit vielen Figuren im Text.] 8. geh. *M.* 6.—

Brockmann, F. J., Oberlehrer am königl. Gymnasium zu Cleve, Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Für Gymnasien und Realschulen bearbeitet. Mit 46 Holzschnitten im Text. Zweite Auflage. [VIII u. 156 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 1.60.

Cantor, Moritz, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Erster Band. Von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1200 n. Chr. Mit vielen Holzschnitten im Text. [VIII u. 804 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 20.—

Doll, Dr. **M.,** Lehrer der praktischen Geometrie am Großh. Polytechnikum zu Karlsruhe, Lehrbuch der praktischen Geometrie zum Unterricht an Baugewerkeschulen und technischen Mittelschulen. Mit Figuren im Text. [IV u. 77 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 2.40.

Eddy, Dr. **H. T.,** Professor der reinen und angewandten Mathematik an der Universität zu Cincinnati, neue Konstruktionen aus der graphischen Statik. Mit zehn Figuren im Text und sechs Tafeln. Vom Verfasser vermehrte und verbesserte deutsche Ausgabe. [IV u. 106 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 4.—

Herwig, Dr. **Hermann,** Professor an der technischen Hochschule zu Darmstadt, physikalische Begriffe und absolute Maasse. [VIII und 89 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 2.40.

Klempt, Diedr. Aug., Realschullehrer in Rostock, Lehrbuch zur Einführung in die moderne Algebra. Mit einigen Hundert Beispielen. [XII u. 260 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 4.—

Königsberger, Leo, zur Geschichte der Theorie der elliptischen Transcendenten in den Jahren 1826—1829. [104 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 3.—

Lagrange's mathematische Elementarvorlesungen. Deutsche Separatausgabe von Dr. H. Niedermüller, Oberlehrer am Nicolaigymnasium zu Leipzig. [IV u. 116 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 2.40.

Mayer, Ernst, Professor an der K. K. Marineakademie in Fiume, über Küstenaufnahmen. Ein Beitrag zu den Lehr- und Handbüchern der Geodäsie. Mit Holzschnitten im Text und vier Tafeln. [60.] gr. 8. geh. n. *M.* 2.40.

Saalschütz, Prof. Dr. **Louis,** der belastete Stab unter Einwirkung einer seitlichen Kraft. Auf Grundlage des strengen Ausdrucks für den Krümmungsradius. Mit Holzschnitten im Text u. 3 lithographirten Tafeln. [XXXI u. 247 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 9.—

Salmon, George, analytische Geometrie des Raumes. Deutsch bearbeitet von Dr. Wilhelm Fiedler, Professor am eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich. II. Theil: Analytische Geometrie der Curven im Raume, der Strahlensysteme und der algebraischen Flächen. Dritte verbesserte Auflage. Mit Holzschnitten im Text. [LXXII u. 686 S. u. Nachträge 8 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 16.—

Schell, Dr. **Wilhelm,** Geh. Hofrath und Professor am Polytechnikum zu Karlsruhe, Theorie der Bewegung und der Kräfte, ein Lehrbuch der theoretischen Mechanik mit besonderer Rücksicht auf das Bedürfniss technischer Hochschulen bearbeitet. Zweite umgearbeitete Auflage. II. Band. 3. Theorie der Kräfte und ihrer Aequivalenz (Dynamik im weiteren Sinne einschl. Statik). 4. Theorie der durch Kräfte erzeugten Bewegung (Kinetik oder Dynamik im engeren Sinne). Mit vielen in den Text gedruckten Holzschnitten. [XII u. 618 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 10.—

Schottky, Dr. **F.,** Privatdocent an der Universität Breslau, Abriss einer Theorie der Abel'schen Funktionen von drei Variablen. [162 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 4.—

Schröter, Dr. **Heinrich,** Professor der Mathematik a. d. Universität zu Breslau, Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumkurven dritter Ordnung als Erzeugnisse projektivischer Gebilde. Nach Jacob Steiner's Principien auf synthetischem Wege abgeleitet. [XV u. 720 S. mit vielen Figuren im Text.] gr. 8. geh. n. *M.* 16.—

Zehme, Dr. **W.,** Direktor der höheren Gewerbeschule zu Barmen, Lehrbuch der ebenen Geometrie nebst Repetitionstafeln. Für Bürger-, Gewerbe- und höhere Stadtschulen, sowie zum Selbstunterrichte. Sechste verbesserte Auflage. Mit einem besonderen Heft Figurentafeln. [VI u. 106 S.] geh. n. *M.* 2.40.

Zeitschrift für Mathematik und Physik. Herausgegeben von Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl und Dr. M. Cantor. Supplement zur historisch-literarischen Abtheilung des XXV. Jahrgangs. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. III. Heft. [IV u. 276 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 6.40.

BUCHBINDEREI
VON
AUGUST WERZ
MÜNCHEN

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Tait, Peter Guthrie,

Elementares Handbuch der Quaternionen

Leipzig 1880

Math.p. 573 m
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11651795-8